

# KANT E AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Gustavo Leal - Toledo<sup>1</sup>

## RESUMO

**Pretende-se mostrar, neste trabalho, que a Exposição Metafísica não depende da Exposição Transcendental nem da geometria euclidiana. Sendo assim, as críticas feitas a Kant e sua relação com a geometria euclidiana, que tinham como principal argumento o surgimento das geometrias não-euclidianas, são descartadas.**

**Palavras-chave:** Kant, Geometria não-euclidiana, Exposição Metafísica, Exposição Transcendental

## INTRODUÇÃO

Depois do surgimento das geometrias não-euclidianas, alguns comentadores julgaram que as teses de Kant, principalmente as relativas ao espaço, não poderiam mais ser sustentadas tal era o seu comprometimento com a geometria euclidiana. Todavia, atualmente alguns comentadores tentam mostrar que os argumentos transcendentais de Kant em relação ao espaço podem ser separados dos seus argumentos que tentavam fundamentar a geometria euclidiana. Tentam esclarecer que Kant tinha outros argumentos que fundavam a geometria de forma mais ampla com base na construção de conceitos, ou seja,

no entendimento.

Neste trabalho, pretende-se mostrar que a Exposição Metafísica que está na Estética Transcendental da *Crítica da Razão Pura* pode ser válida para qualquer geometria, uma vez que não necessita da geometria euclidiana para fundamentar seus argumentos. Não é necessário indagar aqui se a Exposição Transcendental ou a geometria precisam ou não das teses da Exposição Metafísica, só se deve tentar mostrar que a Exposição Metafísica não precisa da Exposição Transcendental ou da geometria. Assim, não se pretende aqui mostrar outros modos que Kant teria para fundamentar a geometria e não é necessário recorrer a outros textos que separam o espaço

---

<sup>1</sup> Doutorando em Filosofia na Pontifícia Universidade Católica.

geométrico do espaço estético ou intuitivo pois a própria *Crítica da Razão Pura* já fornece argumentos suficientes para mostrar que a Exposição Metafísica é anterior e independente da Exposição Transcendental.

### As Geometrias Não-Euclidianas.

Durante séculos, acreditou-se que a única geometria possível era a geometria euclidiana. Essa era a forma verdadeira de ver o mundo e uma das provas disso era que ela não tinha sido contestada desde sua organização feita por Euclides por volta de 300 a.C. Ela era fundamentada sobre postulados que eram tidos como verdades evidentes por si própria. Destes postulados, destacam-se cinco de real interesse para este estudo

1-Uma linha reta pode ser traçada ligando dois pontos quaisquer.

2-Qualquer segmento de reta pode ser traçado indefinidamente.

3-Um círculo pode ser traçado com qualquer centro e com qualquer raio.

4-Todos os ângulos retos são iguais.

5-Se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por uma outra reta, e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor do que dois retos, então as retas se encontrarão, se prolongadas o suficiente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.

O postulado que mais interessa aqui é o quinto. Ele está dizendo que, se duas retas não forem paralelas entre si, elas irão se encontrar se forem prolongadas ao infinito. Além disso, ele diz que para saber se elas são paralelas, é só corta-las por uma outra reta. Elas só serão paralelas se a soma dos ângulos internos que se formaram de cada lado for de 180 graus. Este quinto postulado sempre foi visto como um pouco estranho por não ser tão evidente quanto os outros. Para torná-lo mais evidente, surgiram outras formulações equivalentes para ele, tais como:

1-Retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si.

2-Duas retas que se intersectam não podem ser paralelas a uma mesma reta

Mas o postulado que ficou conhecido como o postulado das paralelas foi:

“Sejam dados, em um plano, uma reta e um ponto que não está nesta reta. Então existe uma e só uma paralela a esta reta passando por este ponto.”

Mas, mesmo assim, este postulado continuava a ser controverso e foi negando este postulado que as

geometrias não-euclidianas surgiram. Mas, para que este postulado fosse negado, era necessário que se deixasse de lado o espaço plano da geometria euclidiana e se começasse a montar figuras dentro de um espaço curvo. Duas foram as geometrias fundadas sobre o espaço curvo. Sobre a superfície da pseudo-esfera, foi fundada a geometria hiperbólica ou de Lobatchevski, e sobre a superfície da esfera, foi fundada a geometria elíptica ou Riemanniana. Estas duas geometrias, por partirem de postulados diferentes, chegavam a conclusões diferentes. O quinto postulado, por exemplo, tem na geometria de Lobatchevski a seguinte formulação: “Sejam dados em um plano uma reta e um ponto que não está sobre esta reta. Há, pelo menos duas retas que passam por este ponto e são paralelas a esta reta”. E, na geometria de Reimann, o quinto postulado ficou assim: “Sejam dados em um plano uma reta e um ponto que não está nesta reta. Não há, então, retas passando por este ponto e que sejam paralelas a esta reta”.

Estas novas descobertas dentro da geometria e também a utilização de Einstein de uma geometria não-euclidiana para a formulação de sua física tiraram toda aquela idéia de que a geometria euclidiana era a geometria do mundo. Acabou prevalecendo a concepção de que a geometria é só um jogo onde se estipulam regras que regem este jogo. Mas outros jogos com outras regras também podem ser jogados e um vale tanto quanto o outro. Dentro desta nova concepção, todos os sistemas que pareciam estar ligados à geometria euclidiana foram considerados falidos. Dentro destes sistemas estava o de Kant que objetivava fundamentar a geometria euclidiana. Mas, só porque Kant acreditava que a geometria que ele conhecia era a única possível, não quer dizer que o seu fundamento desta geometria não vale também para as outras geometrias.

### Kant e a Exposição Metafísica.

Kant conhecia as duas principais noções de espaço que existiam em sua época. Existia a noção de Newton onde o espaço e o tempo eram uma espécie de invólucro ou recipiente das coisas. Eles eram pré-existentes às coisas e existiam em si mesmos. Este era o espaço e tempo absoluto. Existia também a concepção de Leibniz onde espaço e tempo surgiam nas relações entre as coisas e existem nas coisas, ou seja, existem também fora da relação com o sujeito. Esta era a concepção relacional do espaço. Kant percebe que estas duas respostas não são suficientes para fundamentar certas afirmações que se sabe a priori do espaço, pois tanto na concepção absoluta quanto na relacional só se conhecia o espaço pela experiência, ou seja, a

**posteriori**. Kant sabia que somente se o espaço for independente do sujeito seria possível saber certas coisas **a priori** sobre ele, como, por exemplo, que existe necessariamente um ponto no espaço a 200 metros de onde eu estou. Assim, Kant funda um terceiro modo de se pensar a questão onde o espaço e o tempo só existem na relação das coisas com o sujeito porque são algo que o sujeito transcendental impõe às coisas. O espaço é, para Kant, a forma do sentido externo, ou seja, tudo o que aparece como sendo externo ao sujeito aparece no espaço.

É na Exposição Metafísica que Kant começa a fundar este seu terceiro modo de ver o espaço. Nela ele mostra o espaço tanto como uma forma da sensibilidade quanto como uma intuição pura. A Exposição Metafísica não pretende esgotar os argumentos de Kant que dizem respeito ao espaço, pois “por *exposição (expositio)* entendo a representação clara (ainda que não detalhada) daquilo que pertence a um conceito; essa exposição é, porém, *metafísica* quando contém aquilo que apresenta o conceito enquanto dado *a priori*” (Kant, 1999:73). Ou seja, a Exposição Metafísica só se refere as notas a priori mais importantes daquilo que pertence a um conceito. Ela não pretende definir este conceito, pois não pretende expor todas as notas características deste.

Kant começa querendo mostrar que o espaço não é um conceito empírico abstraído das experiências externas. Assim ele quer mostrar que o conceito de espaço não é derivado da experiência, já que a experiência das coisas em relações espaço-temporais pressupõe o espaço e o tempo. O espaço não é um conceito porque conhecer as coisas espacialmente não é conhecer as diferenças qualitativas entre estas coisas (como acontece nos conceitos), mas, sim, conhecer diferenças numéricas. Ou seja, os lugares que os objetos ocupam são suficientes para conhecer numericamente estes objetos sem a necessidade de um conceito. Assim, o espaço não é um conceito. E ele não é empírico, porque para representar algo como fora de mim, ou seja, no mundo empírico, eu já tenho que ter a priori uma representação do espaço. Sem esta representação do espaço não faria sentido dizer que algo é fora de mim pois “fora” já é uma representação espacial. O espaço é a condição de representar coisas como distintas de um eu e de seus estados subjetivos. Depois Kant mostra que o espaço é a condição de representar as coisas, mas as coisas não são condição de representar o espaço. É impossível representar as coisas fora do espaço e do tempo, mas é possível representar o espaço e o tempo sem coisa alguma.

*“Espaço e tempo são representações necessárias a*

*priori, uma vez que podemos representa-los vazios de qualquer coisa mas não podemos representar qualquer coisa que não exista no espaço e no tempo”* (Bonaccini, 2000:12)

Estes dois pontos que Kant aborda tentam fundamentar o espaço como forma da sensibilidade, ou seja, eles são fundados na subjetividade e por isso são **a priori**. Nos próximos dois pontos, Kant aborda o espaço como uma intuição pura, ou seja, ele o toma como objeto e o tematiza. Ao fazer isso, Kant vai além do que a Estética Transcendental se propunha, visto que é preciso ter conceitos do entendimento para se compreender estes pontos. Isso, porém, não quer dizer que a sensibilidade precisa do entendimento, Kant simplesmente foi mais além, por expor as notas características mais importantes do espaço.

No terceiro ponto Kant diz que as partes do espaço são pensadas no espaço uno pois cada espaço particular é pensado como partes do espaço uno. Ou seja, só existe um espaço e todas as partes são pensadas como partes deste espaço que precede as partes. Neste terceiro ponto, aparece a única referência à geometria da Exposição Metafísica. Mas esta referência é só um exemplo do que Kant estava dizendo e, se este exemplo for errado, ele não nega o que foi dito antes.

No quarto ponto, Kant mostra que o espaço é uma intuição e não um conceito (uma distinção que é exaustiva). Para isso ele mostra a relação entre cada um e suas partes. As partes de um conceito podem ser intensivas ou extensivas. As partes extensivas são os objetos que caem sobre o conceito e as partes intensivas são as notas características que compõem um conceito. Em um conceito o todo depende das partes intensivas pois são elas que o compõem e, por isso, elas precedem o conceito. Mas, no espaço, as partes só são possíveis no todo, ou seja, não podem precedê-lo. Além disso, as partes do espaço não caem sobre ele, como acontece no conceito, mas, sim, estão nele. Para terminar, o número de notas de um conceito tem de ser limitado mas o número de partes do espaço é ilimitado. E todas estas partes do espaço são simultâneas ao infinito pois “o espaço é representado como uma magnitude infinita *dada*” (Kant, 1999:74).

Assim, Kant revela as principais notas do espaço, mostrando que o espaço não é um conceito, mas, sim uma intuição. Além disso, esta intuição é **a priori**, por não ser empiricamente obtida. Sendo assim, o espaço é a forma pura dos fenômenos, ou seja, a forma do sentido externo que o sujeito impõe às coisas.

**A Exposição Transcendental, o Espaço e a**

## Espacialidade.

Foi a questão sobre a ligação entre a Exposição Transcendental e a Exposição Metafísica que fez alguns comentadores pensarem que, com o surgimento das novas geometrias, a Exposição Transcendental seria refutada e, por conseguinte, a Exposição Metafísica também o seria. Isto é assim porque a Exposição Transcendental relaciona os conceitos da Exposição Metafísica com a Geometria Euclidiana.

*“Tratando-se do espaço, a doutrina kantiana seria inteiramente determinada por sua recepção da geometria euclidiana: ela terminaria por fazer do espaço euclidiano a forma necessária, a priori, de toda intuição externa. Sendo esta forma comum ao espaço da percepção e ao da ciência, toda extensão da geometria a outras formas de espaço tornar-se-ia impossível, senão impensável. Que essa extensão, no entanto, tenha tido lugar na história da geometria não significa outra coisa senão a refutação de facto da Estética Transcendental”* (Fichant, 1999:13)

No entanto, só porque Kant realmente acreditava que a estrutura do espaço era realmente a estrutura euclidiana não quer dizer que seus argumentos só são válidos para a geometria de Euclides. É perfeitamente possível dissociar o espaço estético da Exposição Metafísica do espaço geométrico. O próprio Kant mostra que a Exposição Transcendental é uma contra-prova que só se sustenta se seguir a Exposição Metafísica, mas esta não depende daquela. No primeiro parágrafo da Exposição Transcendental, Kant diz que os conhecimentos que serão estudados, no caso é a geometria, têm de fluir e pressupor os conceitos da Exposição Metafísica. “A exposição metafísica leva à análise da representação do espaço sem recorrer à relação do espaço com a geometria. É a exposição transcendental que incumbe explorar *em um segundo momento* essa relação [...] A exposição transcendental é, pois, essencialmente indireta: ela não diz nada do espaço de maneira intrínseca” (Fichant, 1999:16/17).

Tendo isto em vista, é preciso uma pequena refutação de Kant pois ele diz que a geometria se ocupa com as propriedades do espaço, mas quem se ocupa com essas propriedades, como, por exemplo, ser uma intuição pura ou, por exemplo, só haver um espaço, é a filosofia transcendental. O próprio Michel Fichant parece compreender isto quando diz:

*“A unidade não compositiva do espaço, sua unicidade, sua infinidade objetivamente dada, sua*

*inalienabilidade que faz com que ele resista a toda extenuação imaginária de seu conteúdo, são estabelecidas e devem ser compreendidas fora de toda referência à geometria”* (Fichant, 1999:23)

Ou seja, todos os conceitos que foram compreendidos na Exposição Metafísica não dependem da geometria e estes conceitos são justamente as propriedades do espaço. A geometria se ocupa com os conceitos e determinações do espaço, e não com as suas propriedades, e exatamente por isso as várias determinações do espaço não podem invalidar as proposições de Kant sobre espaço. “O geômetra pode contentar-se com nada saber dele [do espaço], ao mesmo tempo que pressupõe sempre, no entanto, esse espaço metafísico como o ‘fundamento de suas construções’, isto é, como o fundamento do conhecimento matemático que ele desenvolve” (Fichant, 1999:19). Talvez Kant teria sido mais claro se distinguisse a espacialidade em geral de espaço (conceitos de espaço). Você pode pensar em diferentes tipos de espaço, mas todos pressupõem a espacialidade em geral. Assim, não interessa se o espaço com o qual se trabalha é plano ou curvo, todos são visões diferentes do espaço que está na base deles. “Os conceitos geométricos do espaço estão fundados em uma intuição pré-geométrica do espaço, ou, ainda: o espaço intuitivo, pré-geométrico, precede o espaço geométrico, que é o dos *conceitos de espaço*” (Fichant, 1999:24). Isto pode ser facilmente compreendido se tiver em mente que toda geometria se ocupa com o espaço, ou seja, não interessa se este espaço é reto ou curvo, pois os dois são “espaço”.

Os espaços são determinações particulares do espaço intuitivo único. Isto pode ser demonstrado pelo simples fato de que mesmo as diferentes noções de espaço podem manter relações entre si e podem ser traduzidas uma em termos da outra. Aliás, é preciso perceber que a geometria Reimanniana, por exemplo, é construída em um espaço esférico mas a esfera é construída em um espaço euclidiano. “A superfície da esfera euclidiana é um modelo para os axiomas da geometria não-euclidiana” (Davis & Hersh, 1985:256). Uma geodésica só nos parece curva porque nós a vemos a partir de uma visão euclidiana. Dentro do espaço curvo dessa geodésica, ela nos pareceria reta pois seria a menor distância entre dois pontos, ou seja, a distância que a luz percorreria. Assim, fica demonstrado que cada geometria é uma determinação diferente do mesmo espaço, espaço este que foi estudado na Exposição Metafísica.

**Conclusão.**

É justamente o fato das diferentes geometrias poderem se relacionar e o fato de que cada geometria, a seu modo, inclui as outras, que podemos falar de um espaço único que subjaz a todas as diferentes determinações de espaço e é justamente sobre esta espacialidade em geral que Kant nos fala na Exposição Metafísica. O espaço estético ou intuitivo é o da Exposição Metafísica e tem “seus direitos de anterioridade e à sua independência com relação à exposição transcendental” (Fichant, 1999:31/32). Assim, fica claro que as novas geometrias não podem refutar as propriedades do espaço que são estudadas na filosofia transcendental, pois esta será sempre anterior a qualquer determinação do espaço. Isto faz, então, com que a Exposição Metafísica seja independente da Exposição Transcendental e, então, aquela não pode ser refutada por qualquer crítica a esta.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BONACCINI, J.A. *Breve Consideração Sobre o Problema da Tese da Aprioridade do Espaço e do Tempo*. *Estudia Kantiana* 2 (1), p.7-17, 2000.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática: A História de Uma Ciência Em Tudo e Por Tudo Fascinante*. Rio de Janeiro: Ed. Francisco Alves, 1985.

FICHANT, M. *Espaço Estético e Espaço Geométrico em Kant*. *Revista Analytica – Kant e Aristóteles*. Intuição e Predicação. v.4, n. 2, 1999.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. São Paulo: Ed. Nova Cultura, 1999. (os pensadores).