

## Application of numerical formulation of finite elements and finite differences in nonlinear transient thermal analysis of structures

### Aplicação da formulação numérica de elementos finitos e diferenças finitas na análise térmica transiente não linear

Article Info:

Article history: Received 2021-03-05 / Accepted 2021-04-06 / Available online 2021-04-06

doi: 10.18540/jcecv17iss2pp12050-01-11e

**Natan Sian das Neves**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4679-0461>

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

E-mail: [natan.sian@gmail.com](mailto:natan.sian@gmail.com)

#### Resumo

Dentre as diversas ramos de pesquisa da área estrutural, a análise térmica destaca-se, principalmente, na seara de problemas de estruturas em condições de incêndio. Sendo assim, o presente artigo objetiva realizar uma predição do campo térmico da seção transversal de elementos estruturais de concreto exposta a altas temperaturas. Para tanto, usa-se técnicas numéricas para avaliação do problema físico governado pela equação escalar diferencial de difusão de calor em regime transiente e comportamento não linear. O estudo é direcionado por duas metodologias de solução de natureza distintas, caracterizadas pela aplicação do método de elementos finitos e do método das diferenças finitas. As principais sentenças matemáticas e premissas de cada método numérico utilizado são apresentadas e discutidas detalhadamente. Os resultados numéricos obtidos pelos programas computacionais desenvolvidos são comparados com normas técnicas e soluções numéricas disponíveis na literatura. Em síntese, o comportamento das técnicas numéricas empregadas na solução do problema mostrou-se parelho com os dados de referências, direcionando o desempenho satisfatório do código na aplicação estudada.

**Palavras-chave:** Diferenças finitas. Elementos finitos. Análise térmica. Incêndio. Programa computacional.

#### Abstract

Among the various branches of research in the structural area, thermal analysis stands out, mainly, in the field of structural problems in fire conditions. Thus, this article aims to make a prediction of the thermal field of the cross section of concrete structural elements exposed to high temperatures. For that, numerical techniques are used to evaluate the physical problem governed by the differential scalar equation of heat diffusion in transient regime and non-linear behavior. The study is guided by two different solution methodologies, characterized by the application of the finite element method and the finite difference method. The main mathematical sentences and premises for each numerical method used are presented and discussed in detail. The numerical results obtained by the developed computer programs are compared with technical standards and numerical solutions available in the literature. In summary, the behavior of the numerical techniques employed in the solution of the problem proved to be close in relation to the reference data, directing the satisfactory performance of the code in the studied application.

**Keywords:** Finite differences. Finite elements. Thermal analysis. Fire. Computer program

## 1. Introdução

Os problemas correlacionados à segurança de construções em condição de incêndio é um assunto de suma importância em projetos estruturais. Na construção civil, torna-se cada vez mais evidente a necessidade da realização de análises avançadas e recomendações de segurança-resistência, uma vez que se aplica novas tecnologias e processos nas construções, como em projetos com grande diversidade de materiais, maiores vãos e utilização de elementos estruturais esbeltos. Desta maneira, as estruturas apresentam altos riscos associado às severas reduções e degradações das propriedades dos materiais quando sujeitas a elevadas temperaturas (Caldas, 2008; Regobello, 2007).

Dentro deste contexto, o estudo do comportamento de elementos estruturais sob temperaturas elevadas é um problema que ganha relevância na pesquisa científica, principalmente com o avanço tecnológico nas últimas décadas, onde proporcionou medições e ensaios experimentais mais realísticos e análises numéricas com maior verossimilhança com o fenômeno real (Chapraand e Canale, 2016)

A simulação computacional é uma área que teve um crescimento pronunciado nas últimas décadas devido ao grande avanço tecnológico associado aos computadores com altas velocidades de processamento e armazenamento de dados. Por consequência dessa evolução constante e da disponibilidade de novos recursos computacionais, torna-se notório uma vasta movimentação de pesquisas que utilizam técnicas numéricas destinadas a solução de diferentes fenômenos físicos presentes na natureza. Esses fenômenos contemplam problemas em inúmeros campos da ciência, como nas áreas da mecânica dos sólidos, termofluidos, acústica, eletromagnetismo, biomédicas, dentre outras. Além disso, os aprimoramentos e as atualizações computacionais que surgem com o avanço temporal possibilitam ao meio científico e industrial o uso de métodos numéricos cada vez mais robustos e eficientes na solução de problemas.

Atualmente, a ciência contempla vários métodos aproximados para solução de equações diferenciais que governam problemas físicos. As técnicas usualmente conhecidas e aplicadas na engenharia são método das diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos, elementos de contorno e *meshless*. Em particular, destaca-se o método das diferenças finitas (MDF) pelo surgimento pioneiro e uma filosofia didática de aplicação associado a uma formulação simples. Mesmo com algumas restrições de solução, o MDF mostra-se uma técnica eficaz, conforme visto em Lie (1994) e Xiong et al. (2016). A generalização e amplificação da solução em inúmeros problemas da engenharia é direcionado pela aplicação do método de elementos finitos, devido o mesmo apresentar uma formulação consistente e robusta em diversas áreas de conhecimento. No contexto do presente trabalho, pode-se citar algumas aplicações do MEF para análise térmica, conforme visto em detalhes em Neves et al. (2019), Zandi et al. (2012) e Xu e Wu (2009).

Neste contexto, o presente artigo visa apresentar os principais conceitos acerca do comportamento de estruturas de concreto sob elevadas temperaturas, bem como os procedimento numéricos e a modelagem geral do método das diferenças finitas e do método dos elementos finitos aplicado em um problema de natureza parabólica bidimensional e não linear. A avaliação de desempenho é realizada com os resultados provenientes de procedimentos normativos de cálculo e programas numéricos disponíveis na literatura.

## 2. Conceitos físicos e equações gerais da análise térmica de estruturas

Os conceitos de transferência de calor possuem importantes aplicações em diversos ramos da engenharia, como em problemas relacionados à termodinâmica, escoamentos de fluidos, processos mecânicos e mesmo na área estrutural, onde se busca realizar a predição da distribuição de temperatura em elementos estruturais quando submetido a altas temperaturas (Necati, 1993).

Para analisar os efeitos puramente térmicos nas estruturas, utiliza-se a equação da difusão de calor bidimensional, sem geração interna de calor e não linear, sendo ainda admitida a hipótese de isotropia, como expresso na Equação (1).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho(T) c_p(T) \frac{dT}{dt} \quad (1)$$

Onde  $\rho$  é a massa específica do material,  $c_p$  é o calor específico,  $k$  é a condutividade térmica. Com uma rápida observação na Equação (1), nota-se que é um problema não linear, pois as propriedades físicas variam com a temperatura, sendo uma característica de problemas térmicos de estruturas em condição de incêndio. Devido a tal fato, faz-se necessário obter relações matemáticas para as propriedades em cada instante de tempo  $t$ . O EN 1992-1-2 (2004) prescreve em seu texto algumas relações para as propriedades do concreto. No conjunto de expressões matemáticas a seguir, sintetizado na Equação (2), apresenta-se o comportamento da massa específica do concreto, adotando, em temperatura ambiente, um valor de 2400 kg/m<sup>3</sup>.

para 20°C ≤  $T$  ≤ 115°C:

$$\rho(T) = \rho_c(20^\circ)$$

para 115 °C ≤  $T$  ≤ 200°C:

$$\rho(T) = \rho_c(20^\circ)(1 - 0,02(T - 115 / 85)) \quad (2)$$

para 200°C ≤  $T$  ≤ 400°C:

$$\rho(T) = \rho_c(20^\circ)(0,98 - 0,03(T - 200 / 200))$$

para 400°C ≤  $T$  ≤ 1200°C:

$$\rho(T) = \rho_c(20^\circ)(0,95 - 0,07(T - 400 / 800))$$

Na Equação (3) é mostrado um conjunto de expressões para o calor específico do concreto seco. O calor específico na temperatura ambiente de 20°C é igual a 900 J/kg°C. Considerando o teor de umidade do concreto no comportamento do calor específico, entre o intervalo de 100°C até 115°C tem-se um valor de pico. Sendo assim, para teores de umidade de 0%, 1,5% e 3%, tem-se valores de pico de 900, 1470 e 2020 J/kg°C.

para 200 °C,,  $T$ ., 400 °C:

$$c_c(T) = 1000 + (T - 200) / 2$$

para 100 °C,,  $T$ ., 200 °C :

$$c_c(T) = c_c(20^\circ \text{C}) + (T - 100) \quad (3)$$

para 20 °C,,  $T$ ., 100 °C:

$$c_c(T) = c_c(20^\circ \text{C})$$

para 400 °C,,  $T$ ., 1200 °C:

$$c_c(T) = 1100$$

Por fim, o EN 1992-1-2 (2004) possibilita modelar a condutividade térmica do concreto adotando um limite superior e inferior. A Equação (4) representa o modelo de redução da propriedade considerando o limite inferior, sendo-o utilizado no presente trabalho.

para 20 °C,,  $T$ ., 1200 °C:

$$k(T) = 1,36 - 0,136(T / 100) + 0,0057(T / 100)^2 \quad (4)$$

Além da mudança das propriedades físicas associadas à variação de temperatura, o problema requer as condições de contorno. Em modo geral, uma fronteira  $\Gamma$  é constituída por quatro parcelas, como mostra a Equação (5).

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q + \Gamma_r + \Gamma_c \quad (5)$$

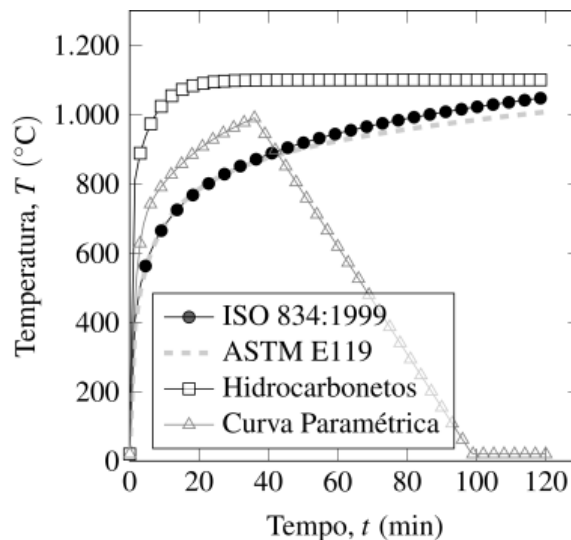
Onde  $\Gamma_u$  é a temperatura prescrita,  $\Gamma_q$  é o fluxo prescrito,  $\Gamma_r$  e  $\Gamma_c$  são os fluxos por radiação e convecção no contorno, respectivamente (Necati, 1993). Para estruturas em condição de incêndio, as condições no contorno são caracterizadas pelas parcelas de radiação e convecção (Silva, 2012), rescrevendo a Equação (6).

$$\Gamma = h_e(T - T_g) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_g^4) \quad (6)$$

Sendo ainda,  $h_e$  é o coeficiente de convecção,  $T_g$  é a temperatura dos gases,  $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8}$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $\varepsilon$  é a emissividade. Observa-se que o coeficiente de radiação apresenta maior influência da temperatura em relação ao coeficiente de convecção, ou seja, em situação de incêndio, após um certo tempo de exposição ao fogo a radiação torna-se predominante. A norma ISO 834 (1999) estabelece que a temperatura dos gases ao redor do corpo, pode ser determinada pela Equação (7).

$$T_b = T_{ambiente} + 345 \log(8t + 1) \quad (7)$$

Sendo que a Equação (7) é denotada curva de incêndio-padrão, onde a temperatura ambiente é tomada como sendo igual a 20°C. Além disso, deve-se ressaltar que a descrição do desenvolvimento de incêndios reais é um processo complexo que relaciona inúmeros parâmetros, como as propriedades físicas dos materiais de vedação do ambiente, características e quantidade dos materiais combustíveis, fator de ventilação e dimensão do compartimento em situação de incêndio.



**Figure 1 – Exemplos de curvas temperatura-tempo de incêndio – nominal e paramétrico.**

Sendo assim, busca-se definir modelos matemáticos capazes de simular adequadamente a temperatura dos gases quentes em um compartimento incendiado, originando as curvas de incêndio nominais e paramétricas. Tais curvas desprezam a fase de ignição e desenvolvimento do incêndio, levando em consideração somente a fase de pós-*flashover*, conforme esquematizado na Figura 1. Salienta-se que, na engenharia de prevenção contra incêndio, o termo *flashover* representa o

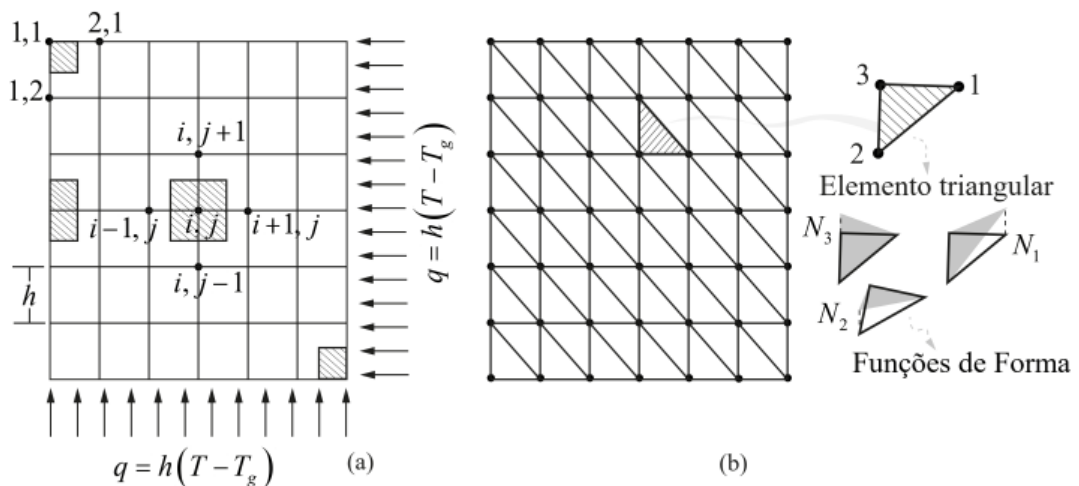
momento em que o incêndio atinge a sua inflamação generalizada - o ambiente passa a ser completamente tomado pelas chamas e os gases quentes.

### 3. Técnicas aproximadas da engenharia

Dentre as técnicas numéricas disponíveis para as soluções das equações diferenciais governantes de fenômenos físicos da natureza, escolhe-se um método de natureza diferencial, denominado método das diferenças finitas (MDF) e um método de natureza integral, chamado de método de elementos finitos (MEF). As principais sentenças e conceitos de cada método usado é apresentado nas próximas seções do trabalho.

#### 3.1 Método do balanço de energia e aproximação por diferenças finitas

O método das diferenças finitas é uma técnica que possui como cerne a aproximação direta dos operadores derivadas por expressões algébricas de diferenças entre pontos, conforme pode ser visualizado em detalhes em Neves (2020) e Neves et al. (2018). Contudo, em vez de aproximar a equação diferencial de governo de forma direta pelas aproximações de diferenças finitas, em algumas aplicações é conveniente determinar a equação de diferenças finitas (EDF) por meio de um balanço de energia, que tem como base a conservação de energia em um volume de controle com centro em um nó da malha (Özişik et al., 2017).



**Figure 2 - Características da discretização numérico do domínio bidimensional para técnica de (a) diferenças finitas e (b) elementos finitos.**

Toma-se um ponto genérico de coordenada  $(i,j)$  no domínio, conforme ilustra a Figura 2(a). Para escrever uma equação de diferenças finitas para esse nó, faz-se um balanço de energia em torno do mesmo, resultando na Equação (8).

$$T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + \left( -4 - \frac{h^2 \rho c_p}{k \Delta t} \right) T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} = - \left( \frac{h^2 \rho c_p}{k \Delta t} \right) T_{i,j}^n \quad (8)$$

A Equação (8) está na forma implícita, o que garante que o problema é incondicionalmente estável e não necessita de critério de estabilidade (Fortuna, 2000). Considera-se os espaçamentos entre pontos iguais, ou seja,  $h_x = h_y = h$ . Quando se aplica a EDF nos pontos da malha numérica,

obtem-se um sistema de linear de equações, cujo na forma matricial tem o seguinte aspecto apresentado na Equação (9).

$$[\mathbf{K}_r]\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{F}_r\} \quad (9)$$

Ressalta-se o fato que o sistema posto na Equação (9) não contém o tratamento das condições de contorno do problema em cada face do domínio, onde se deve respeitar a Equação (6). Sendo assim, a Equação (8) é válida em todo o domínio, porém, nos pontos em contato com o contorno deve-se ter um tratamento diferenciado por conta dos efeitos associados aos fluxos de convecção e radiação. Então realiza-se um balanço de energia em torno do ponto (1,1) (ver Figura 2), onde tem-se a influência dos termos da Equação (6) e os efeitos de condução. Logo, chega-se na equação de diferenças finitas (EDF) para tal ponto, conforme mostrado a seguir.

$$2T_{2,1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{h^2 \rho c_p}{k \Delta t}\right) T_{1,1}^{n+1} + 2T_{1,2}^{n+1} = -\left(\frac{h^2 \rho c_p}{k \Delta t}\right) T_{i,j}^n + L + 2\frac{2h}{k} \left[ h_e (T - T_g) + \dot{\sigma} (T^4 - T_g^4) \right] \quad (10)$$

A Equação (10) pode ainda ser deduzida alternativamente por um balanço de energético entre os fluxos de condução, convecção e radiação sobre o volume de controle. Expressões semelhantes podem ser obtidas para os demais pontos no domínio.

### 3.2 Procedimentos de elementos finitos

Os procedimentos numéricos de elementos finitos baseiam-se no método de resíduos ponderados. Sendo assim, conhecida a formulação forte do problema comportamento térmico de estruturas bidimensionais, inicia-se a formulação do método de elementos finitos para problemas de difusão de calor, multiplicando a Equação (1) por uma função auxiliar  $w$  e integra-se as sentenças. Após algumas manipulações baseadas na integração por partes e o teorema da divergência (Reddy e Gartling, 2010), chega-se na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dw}{dx} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dw}{dy} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} w d\Omega = - \int_{\Gamma} q_n w d\Gamma \quad (11)$$

A Equação (11) é conhecida como formulação variacional fraca, válida por todo domínio contínuo  $\Omega$ . Ressalta-se que a mesma não apresenta nenhuma aproximação numérica. Escrevendo a função primal aproximada como uma combinação de coeficientes e funções de forma  $N$ , conforme dado pela Equação (12).

$$T \approx \sum_{i=1}^{n_e} N_i T_i = \mathbf{N}^T \mathbf{T} \quad w \approx \sum_{j=1}^{n_e} N_j w_j = \mathbf{N}^T \mathbf{w} \quad (12)$$

Na Figura 2(b) apresenta qualitativamente o comportamento das funções de forma para um elemento triangular. Substituindo as aproximações na Equação (12), com algumas manipulações matemáticas, chega-se na forma matricial compacta do sistema, conforme é representado na Equação (13).

$$[\mathbf{C}]\{\mathbf{T}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (13)$$

Onde,  $\mathbf{C}$  é a matriz de capacidade térmica,  $\mathbf{K}$  é a matriz de condutividade térmica total e  $\mathbf{F}$  é o vetor térmico. No contexto da análise estrutural, essas matrizes são usualmente denominadas, respectivamente, de matriz de amortecimento, matriz de rigidez e vetor de força.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \mathbf{H}^e + \mathbf{R}^e \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_r \quad (14)$$

As matrizes  $\mathbf{H}^e$  e  $\mathbf{F}_h$  são responsáveis pela contribuição da ação do fluxo de convecção do contorno, e as matrizes  $\mathbf{R}^e$  e  $\mathbf{F}_r$  representam a parcela do fluxo de radiação (Neves, 2019). Devido à natureza parabólica da equação diferencial de calor, aplica-se o método de diferenças finitas para aproximação do operador diferencial temporal (Reddy e Gartling, 2010), resultando na expressão a seguir para a temperatura no instante  $n + 1$ :

$$[\mathbf{A}]T_{n+1}^{\theta} = \{\mathbf{B}\} \quad (15)$$

Onde:

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \theta \mathbf{K} \right) \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} - (1 - \theta) \mathbf{K} \right) T_n^{\theta} + (1 - \theta) \mathbf{F}_n + \theta \mathbf{F}_{n+1}$$

Em que  $\Delta t$  é o intervalo de tempo e o parâmetro  $\theta$  varia de 0 a 1, que representa o esquema de integração no tempo. No presente trabalho adota-se 2/3, que caracteriza um esquema incondicionalmente estável. Ressalta-se que independentemente do método numérico utilizado, os procedimentos finais resulta-se na solução de um sistema algébrico convencional, conforme pode ser visto na Equação (9) e na Equação (15).

#### 4. Exemplos numéricos de aplicação

A experimentação numérica é caracterizada pela análise de elementos estruturais de concreto em condição de incêndio. Sendo assim, os casos testes estudados são apresentados na Figura 3, onde mostra-se uma viga de seção retângulo de 300x600 mm submetida à ação do fogo em três faces e um pilar quadrado de concreto com dimensão 300x300 mm exposto ao fogo nas quatro faces. A temperatura dos gases quentes ao redor da estrutura é modelada pela curva de incêndio-padrão da ISO 834 (1999), conforme apresentado na Equação (7).

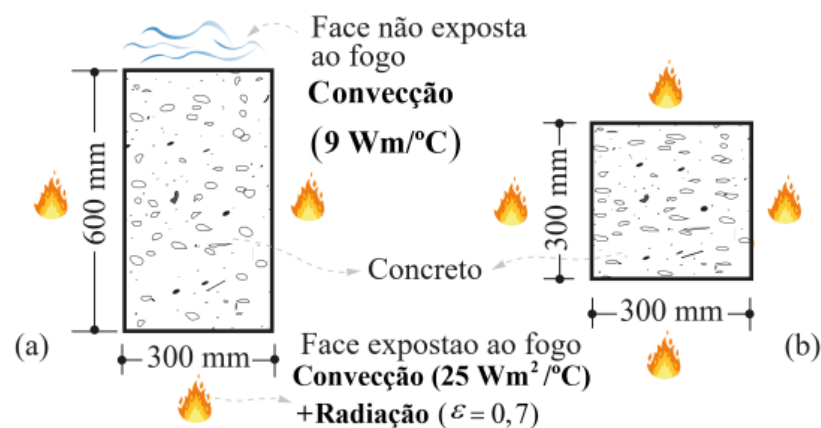
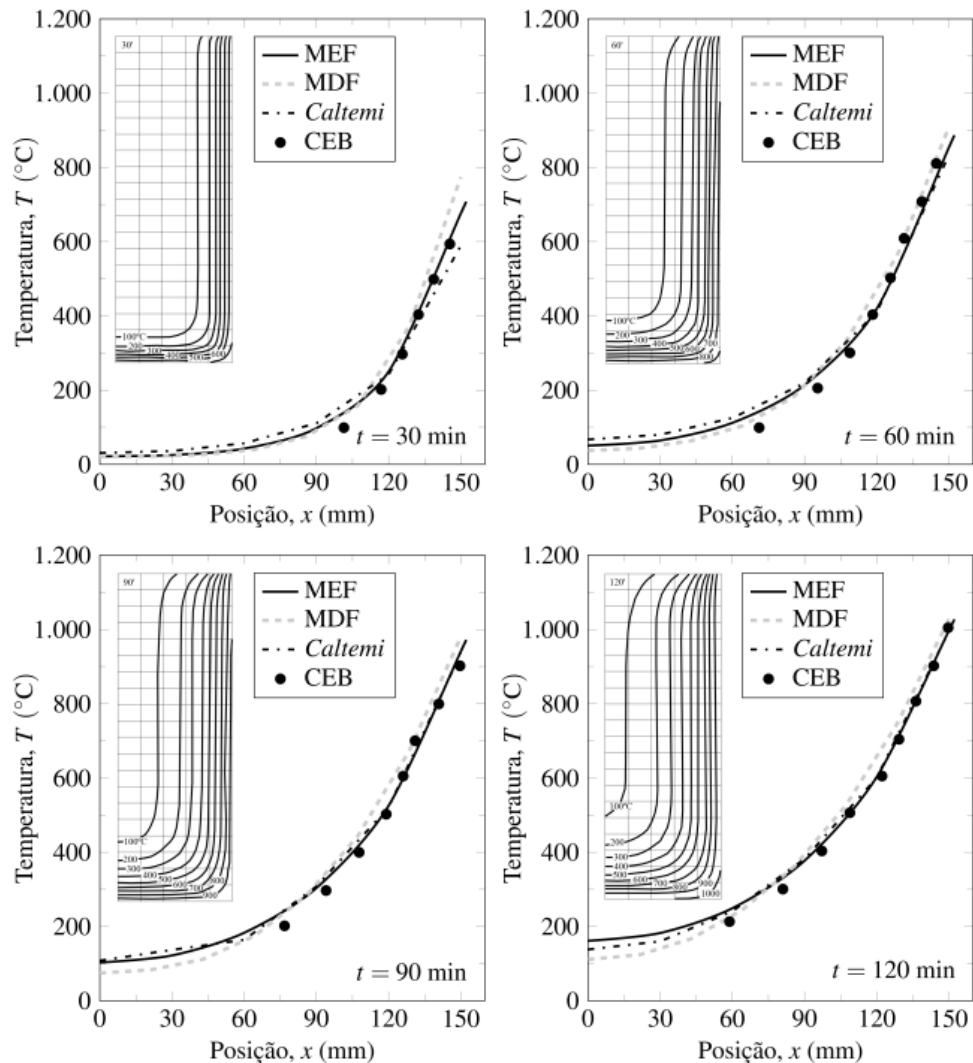


Figure 3 - Dimensões e condições de contorno da viga e pilar de concreto expostos ao fogo.

Na primeira configuração, utiliza-se a simetria física e geométrica da viga de concreto, ou seja, analisa-se somente metade da viga. Os resultados da implementação computacional do presente trabalho via MEF e MDF são comparados com os dados obtidos com programa *Caltemi*, vide Figueiredo Júnior (2002) e as previsões da CEB (1982). Devido às propriedades físicas do concreto variar com a temperatura, utiliza-se as expressões que descrevem tal comportamento, conforme apresentado nas Equações (2), (3) e (4).

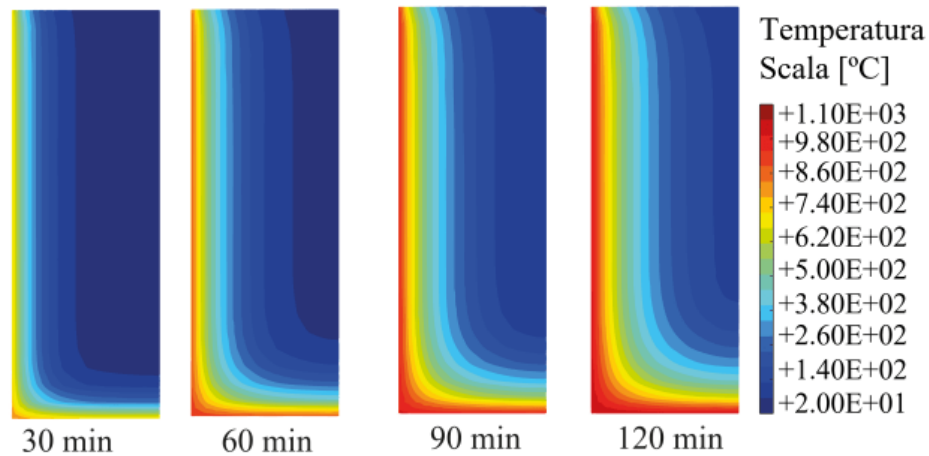
A Figura 4 apresenta os perfis de temperatura obtidos em pontos localizados no meio da viga ( $H/2$ ) com um espaçamento entre cada ponto de  $L/10$ . Os resultados obtidos com os métodos numéricos apresentam boa concordância com o programa *Caltemi* e com a norma técnica CEB (1982). Nota-se que a temperatura cresce do centro até a superfície da viga e os pontos próximos à superfície externa apresentam maiores valores de temperatura, uma vez que estão em contato direto com fogo.



**Figure 4 - Perfil de temperatura na viga de concreto para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo.**

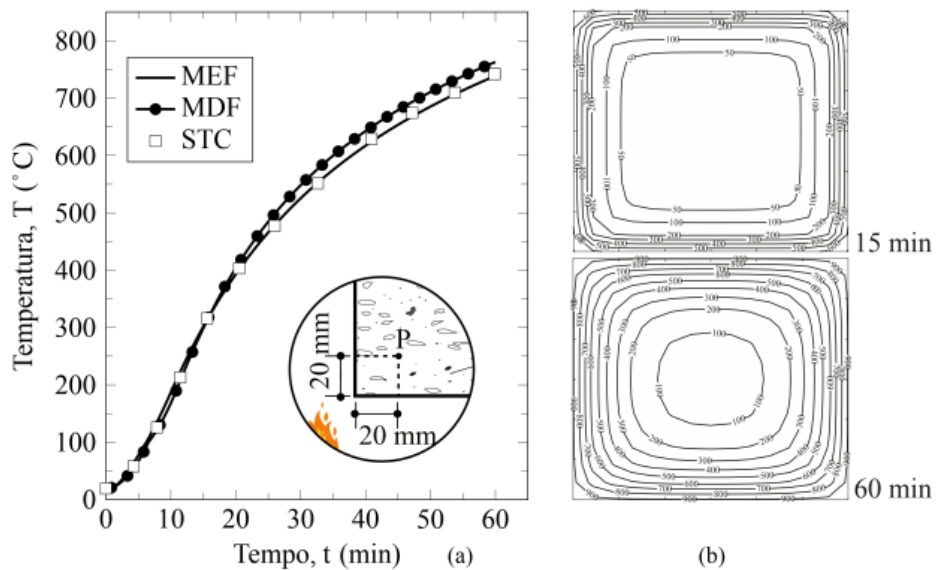
Para facilitar o entendimento e visualização de resultados é comum plotar o campo de temperatura para um dado passo temporal, a fim de verificar onde ocorrem os pontos e regiões de maior aquecimento na estrutura. Desta forma, a Figura 5 ilustra o campo térmico da metade da viga. É possível visualizar que na face direita o campo deve ser perpendicular à aresta devido imposição de uma condição de isolamento térmico, ou seja, fluxo nulo. A face inferior e esquerda da viga apresentam maiores valores de temperatura devido o contato direto com fogo.





**Figure 5 - Distribuição bidimensional de temperatura da viga de concreto para 30, 60, 90 e 120 min de exposição ao fogo.**

O próximo problema relacionado às estruturas de concreto é composto por um pilar quadrado, conforme mostrado na Figura 3. O teor de umidade do concreto é igual a 1,5% de peso, adota-se ainda a emissividade de 0,7 e o coeficiente de convecção igual a  $25 \text{ W/m}^2\text{°C}$ . A avaliação de resultado é direcionada com base na evolução da temperatura no ponto P, localizado próximo ao canto inferior esquerdo do pilar de concreto. Neste ponto são realizadas as medições e extrações de resultados acerca da temperatura ao longo do tempo de exposição ao fogo.



**Figure 6 - Comparação entre os métodos numéricos na medição da evolução de temperatura no ponto P contido no pilar de concreto em situação de incêndio; (b) Isotermas para 15 e 30 min.**

Neste caso, é utilizado como solução de referência os resultados numéricos do programa STC (*Super Temp Calc*), sendo este baseado nos procedimentos numéricos de elementos finitos e desenvolvido no trabalho de Pierin (2011). Na Figura 6(a) realiza-se as comparações entre os modelos utilizando o método de elementos finitos e diferenças finitas. Desta forma, as curvas possuem um comportamento bem direcionado em comparação com o modelo de referência da literatura adotado, confirmando a boa aderência e implementação dos procedimentos numéricos. Ressalta-se uma ligeira variação nos resultados entre o MDF e os dados obtidos com MEF e STC, contudo, ao nível de recomendações de engenharia é uma diferença aceitável. Adicionalmente, na

Figura 6(b) apresenta-se as isotermas da seção transversal do pilar de concreto no tempo 15 e 30 min. Esse recurso gráfico é frequentemente usado em normas técnicas e interessante recorrente em projetos e dimensionamentos de estruturas.

## 5. Conclusão

Este trabalho visou apresentar as principais características do método de elementos finitos e diferenças finitas aplicados em problemas de condução de calor transiente não linear. As aplicações numéricas transitam no contexto de estruturas em condição de incêndio, associado ao estudo de elementos de concreto. Resumidamente, em relação ao comportamento dos códigos computacionais desenvolvidos com base nos métodos numéricos escolhidos, ambos as técnicas apresentaram resultados satisfatórios quando comparados com as soluções da literatura. Quando se compara as características e funcionalidade dos métodos, o MEF apresenta vantagens em frente ao MDF, uma vez que o mesmo apresenta uma formulação robusta que possibilita a aplicação em problemas com configurações diversas. Todavia, afirma-se rigidamente neste trabalho que se deve realizar uma análise prévia do problema físico de interesse, objetivando levantar características, variáveis e complexidades associado ao comportamento do problema, e posteriormente definir, baseado na investigação inicial, o método numérico mais adequado para solução do problema.

## Referências

- Caldas, R. B. (2008). *Análise numérica de estruturas de aço, concreto e mistas em situação de incêndio*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, Brasil.
- CEB. (1982). *Design of concrete structures for fire resistance. preliminar draft of appendix to the CEB FIP model code*. Paris.
- Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2016). *Métodos Numéricos para Engenharia*. McGraw Hill.
- EN 1992-1-2. (2004). *Eurocode 2: Design of concrete structures-part 1-2: General rules-structural fire design*. Brussels.
- Figueiredo Júnior, F. P. (2002). *Simulação via método dos elementos finitos da distribuição de temperatura em estruturas metálicas e mistas no caso de incêndio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, Brasil.
- Fortuna, A. O. (2000). *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo.
- ISO 834. (1999). *Fire resistance tests-elements of building construction*. Geneva.
- Lie, T. (1994). Fire resistance of circular steel columns filled with bar-reinforced concrete. *Journal of structural engineering, American Society of Civil Engineers*, v. 120, n. 5, p. 1489–1509. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:5\(1489\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:5(1489))
- Necati, O. M. (1993). *Heat conduction*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Neves, N. S. (2019). *Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil.
- Neves, N. S. (2020). Uma introdução aos procedimentos numéricos do método diferenças finitas: um estudo do comportamento de vigas de fundação na engenharia civil. *Revista Tecnologia*, v. 41, n. 1. <https://doi.org/10.5020/23180730.2020.10683>
- Neves, N. S., Azevedo, M. S., Camargo, R. S., & Pinheiro, V. P. (2019). Análise térmica bidimensional de perfil de aço sujeita a elevadas temperaturas. In: X Encontro Científico de Física Aplicada, Vitória. Anais... Blucher.
- Neves, N. S., Souza, R. M. & Pinheiro, V. P. (2018). A importância dos modelos teóricos e técnicas numéricas na construção de um elo com a prática da engenharia estrutural. *Revista Eixo*, v. 7, n. 1, p. 26–35. <https://doi.org/10.19123/eixo.v7i1.490>

- Özişik, M. N., Orlande, H. R., Colaço, M. J., & Cotta, R. M. (2017). *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press.
- Pierin, I. (2011). *A instabilidade de perfis formados a frio em situação de incêndio*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Reddy, J. N. & Gartling, D. K. (2010). *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. CRC press.
- Regobello, R. (2007). *Análise numérica de seções transversais e de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto em situação de incêndio*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Silva, V. P. (2012). *Projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio: conforme ABNT NBR 15200: 2012*. São Paulo: Editora Blucher.
- Xiong, M.-X., Wang, Y. & Liew, J. R. (2016). Evaluation on thermal behavior of concrete-filled steel tubular columns based on modified finite difference method. *Advances in Structural Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 19, n. 5, p. 746–761. <https://doi.org/10.1177/1369433215622864>
- Xu, Y.-Y. & Wu, B. (2009). Fire resistance of reinforced concrete columns with l-, t-, and+-shaped cross-sections. *Fire Safety Journal*, Elsevier, v. 44, n. 6, p. 869–880. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2009.04.002>
- Zandi, Y., Burnaz, O. & Durmuş, A. (2012). Determining the temperature distributions of fire exposed reinforced concrete cross-sections with different methods. *Research Journal of Environmental and Earth Sciences*, Maxwell Science Publishing, v. 4, n. 8, p. 782–788.