

Elemento corrotacional de viga-pilar com molas para análise de estruturas com ligação semirrígida

Co-rotational element of beam-column with springs for analysis of structures with semi-rigid connection

Article Info:

Article history: Received 2022-06-07 / Accepted 2022-08-15 / Available online 2022-09-15

doi: 10.18540/jcecv18iss6pp14684-01e

Luiz Antonio Farani de Souza

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7194-5851>

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Brasil

E-mail: lasouza@utfpr.edu.br

Everton Luis Consoni da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0566-7296>

Universidade Estadual de Maringá - UEM, Brasil

E-mail: pg403386@uem.br

Resumo

Em grande parte dos projetos de estruturas em aço, as ligações viga-pilar são consideradas perfeitamente flexíveis ou totalmente rígidas. Essa suposição resulta em uma estimativa imprecisa do comportamento mecânico de pórticos. A formulação de um elemento finito corrotacional de viga-pilar com molas de comprimento nulo em suas extremidades é apresentada. Esse elemento é utilizado para discretizar dois sistemas estruturais com ligação semirrígida e comportamento não linear geométrico. O sistema de equações não lineares, que descreve o problema estrutural, é solucionado com o procedimento incremental-iterativo de Potra-Pták associado à técnica de continuação Resíduo Ortogonal. As simulações computacionais são realizadas com o programa livre Scilab. Os resultados numéricos obtidos revelam que a alteração da ligação entre elementos estruturais de rígida para semirrígida aumenta a flexibilidade da estrutura e diminui sua capacidade de resistir às forças aplicadas.

Palavras-chave: Ligação semirrígida. Resíduo Ortogonal. Potra-Pták. Formulação corrotacional. Elemento híbrido.

Abstract

In most steel structural designs, beam-to-column connections are considered either perfectly flexible or fully rigid. This assumption results in an inaccurate estimate of the mechanical behavior of frames. The formulation of a beam-column co-rotational finite element with zero-length springs at its ends is presented. This element is used to discretize two structural systems with semi-rigid connection and geometric nonlinear behavior. The system of nonlinear equations, which describes the structural problem, is solved with the incremental-iterative procedure of Potra-Pták associated with the Orthogonal Residue following-path. Computer simulations are performed with the open-source program Scilab. The numerical results obtained reveal that the alteration of the connection between structural elements from rigid to semi-rigid increases the flexibility of the structure and decreases its capacity to resist applied forces.

Keywords: Semi-rigid connection. Orthogonal Residue. Potra-Pták. Co-rotational formulation. Hybrid element.

1. Introdução

O propósito da análise estrutural é determinar as tensões, as deformações, os esforços internos e os deslocamentos de uma estrutura sujeita a carregamentos. Baseado nos resultados dessa análise, o engenheiro estrutural verifica se um projeto considerado possui requisitos adequados quanto à resistência e aos deslocamentos para uma combinação de cargas (Pinheiro e Silveira, 2005).

O estudo do comportamento de ligações em estruturas metálicas é muito importante em matéria de engenharia, porque, em adição ao conhecimento do comportamento específico de ligações, permite considerar sua flexibilidade no projeto estrutural (Soares et al., 2021). Em geral, o comportamento idealmente flexível ou totalmente rígido de ligações em projetos de estruturas em aço é assumido na análise global de pórticos. A implementação do comportamento das mesmas deve satisfazer determinadas suposições. O objetivo de se obter estruturas mais leves e econômicas leva os engenheiros a otimizar projetos. Contudo, nem sempre é claro onde a estrutura deve ser enrijecida ou reforçada (Elvin e Strydom, 2018).

As ligações são uma das partes principais de um pórtico estrutural, uma vez que têm efeito significativo na resposta mecânica do mesmo (Charvade e Sarayi, 2020). O uso de uma conexão idealmente flexível implica que nenhum momento é transmitido entre a viga e o pilar. A condição totalmente rígida pressupõe que nenhuma rotação ocorre entre os membros ligados à conexão. Entretanto, esses dois casos de comportamento são extremos e, na prática comum, a maioria das conexões usadas transmite algum momento parcial (Ihaddoudène et al., 2009).

Investigações experimentais (Jones et al., 1983; Nethercot et al., 1998) já demonstraram que a maior parte das conexões utilizadas em projetos apresenta comportamento semirrígido. Isso pode influenciar substancialmente na estabilidade geral do sistema estrutural, bem como na distribuição dos esforços internos que atuam em seus elementos (Silva et al., 2018).

As conexões semirrígidas são mais econômicas do que as conexões rígidas, uma vez que aquelas resultam em uma economia de custos de fabricação de até 28% devido à necessidade de menos horas de trabalho, chapas mais finas, menos parafusos e soldas menores. Além disso, estruturas com ligações semirrígidas possuem capacidade adicional de carga, visto que os momentos que podem resistir não são contabilizados na análise (Weynand et al., 1998; Elvin e Strydom, 2018).

A ligação é geralmente representada por elementos fictícios nas extremidades dos membros estruturais. A esses elementos são atribuídas relações pré-determinadas entre forças e deslocamentos, de modo a simular o comportamento da ligação como um todo. O modelo mais simples para analisar pórticos com ligações semirrígidas é uma representação linear da mola que em muitos casos é bastante adequada (Simoes, 1996).

Na análise não linear estrutural, há duas formulações principais de elementos finitos dependentes da maneira de como o sistema cinemático é atualizado durante o processo de análise, que são os modelos Lagrangeano e Corrotacional. A aproximação Corrotacional é mais simples e efetiva do que a Lagrangeana quanto à predição do comportamento em grandes deslocamentos de estruturas (Van Hai et al., 2019).

A avaliação da estabilidade global de um elemento ou conjunto de elementos estruturais é um dos fatores mais importantes no que diz respeito à concepção estrutural, porque visa garantir a segurança da estrutura diante da perda de sua capacidade resistente, causada pelo aumento das deformações em decorrência das ações horizontais e verticais (Alves e Paixão, 2017).

Neste artigo é apresentada a formulação de um elemento finito corrotacional de viga-pilar baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli, intitulado de elemento corrotacional híbrido, em que molas de comprimento nulo são incluídas nas suas extremidades. Supõe-se que a relação momento – rotação da ligação é linear. Esse elemento é utilizado para discretizar dois sistemas estruturais com ligação semirrígida e comportamento não linear geométrico, que são: um pilar estudado por Ye e Xu (2017); e o pórtico de Lee analisado por Ibrahim e Ismael (2016). O material que constitui os elementos estruturais tem relação constitutiva elástica linear (obedece à Lei de Hooke). As trajetórias de equilíbrio das estruturas são obtidas variando a rigidez rotacional da mola que representa a ligação entre membros estruturais. As simulações são realizadas com o programa livre

Scilab, versão 6.1.1 (Scilab, 2021). O sistema de equações não lineares, que descreve o problema estrutural, é solucionado por meio do procedimento incremental-iterativo baseado no método de Potra-Pták (Souza et al., 2018) e associado à técnica de continuação Resíduo Ortogonal.

2. Material e Métodos

Nesta seção são apresentados: a formulação do elemento corrotacional de viga-pilar proposto por Crisfield (1991) e Yaw (2009), o qual é adaptado por meio da adição de molas de comprimento nulo em suas extremidades; e o método incremental-iterativo utilizado para a obtenção da solução aproximada do sistema de equações não lineares.

2.1 Elemento Finito Corrotacional Híbrido

Seja o elemento de viga-pilar com molas rotacionais de comprimento nulo nas suas extremidades, chamado de elemento corrotacional híbrido, conforme mostra o desenho esquemático na Figura 1. As molas do elemento nos nós “1” e “2” têm rigidezes S_{R1} e S_{R2} e as rotações relativas das mesmas são representadas por θ_{r1} e θ_{r2} , respectivamente.

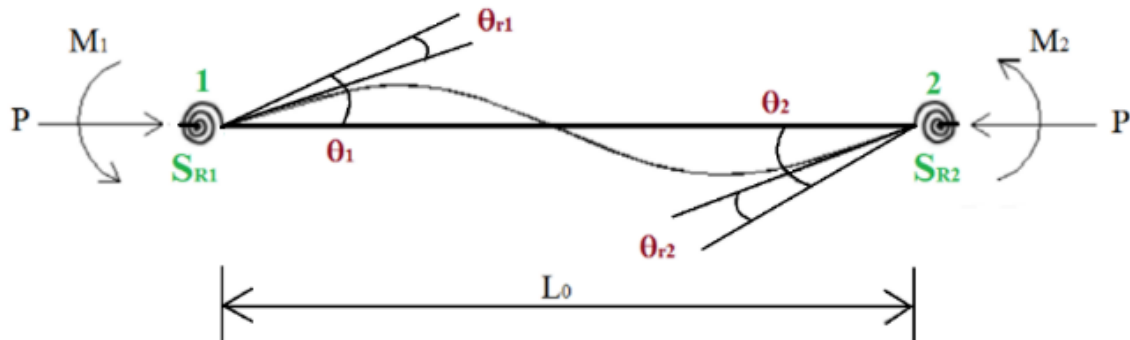


Figura 1 - Elemento de viga-pilar com molas nas extremidades.

Na configuração inicial, as coordenadas dos nós “1” e “2” do elemento no sistema cartesiano global são (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente. O comprimento inicial (indeformado) L_0 da viga é dado pela seguinte equação (Yaw, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (1)$$

Para o elemento na sua configuração atual (deformada), as coordenadas nodais globais são $(x_1, y_1) = (X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$ para o nó “1” e $(x_2, y_2) = (X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$ para o nó “2”, em que u_i é o deslocamento do nó i na direção X e v_i é o deslocamento do nó i na direção Y , sendo $i = 1, 2$. O comprimento atual (deformado) L é:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

O vetor de deslocamentos globais \mathbf{p} do elemento finito m é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T, \quad (3)$$

na qual θ_1 e θ_2 são as rotações em torno do eixo Z . O deslocamento axial local (u_1) do elemento é calculado por:

$$u_1 = L - L_0. \quad (4)$$

No entanto, se a diferença entre L e L_0 for muito pequena, a Equação (4) fica mal condicionada para uso em uma configuração numérica. Crisfield (1991) propõe a multiplicação de u_1 por $(L + L_0) / (L + L_0)$, o que resulta em uma fórmula mais bem condicionada:

$$u_1 = \frac{(L - L_0)(L + L_0)}{L + L_0} = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0}. \quad (5)$$

A deformação específica ε é assumida constante e é determinada por $\varepsilon = u_1/L_0$. A força axial N do elemento é, então, dada por:

$$N = \frac{EAu_1}{L_0}, \quad (6)$$

na qual A é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade longitudinal. A relação entre os momentos (\bar{M}_1 e \bar{M}_2) e as rotações (θ_{11} e θ_{21}) nas extremidades do elemento híbrido pode ser escrita como segue (Hayalioglu e Degertekin, 2005):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} r_{ii} & r_{ij} \\ r_{ij} & r_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

sendo I o momento de inércia da seção transversal, $r_{ii} = \frac{1}{K_R} \left(4 + \frac{12EI}{L_0 S_{R2}} \right)$, $r_{jj} = \frac{1}{K_R} \left(4 + \frac{12EI}{L_0 S_{R1}} \right)$, $r_{ij} = \frac{2}{K_R}$ e $K_R = \left(1 + \frac{4EI}{L_0 S_{R1}} \right) \left(1 + \frac{4EI}{L_0 S_{R2}} \right) - \frac{4E^2 I^2}{L_0^2 S_{R1} S_{R2}}$. As rotações nodais locais (θ_{11} e θ_{21}) são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{11} = \arctan \left(\frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1} \right), \quad (8)$$

$$\theta_{21} = \arctan \left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2} \right), \quad (9)$$

em que $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$ e $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$. Os ângulos θ_1 e θ_2 são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para o ângulo inicial β_0 e o para o ângulo corrente β da barra são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right), \quad (10)$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1} \right). \quad (11)$$

A matriz de rigidez tangente elementar \mathbf{K}_{el} no sistema global de coordenadas é determinada em função de duas parcelas - matriz de rigidez dependente do material \mathbf{K}_M e matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais \mathbf{K}_G (Crisfield, 1991; Yaw, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G. \quad (12)$$

A matriz \mathbf{K}_M é dada por:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{R}^T \mathbf{k}_M \mathbf{R}, \quad (13)$$

sendo a matriz \mathbf{k}_M representada por (Chen e Lui, 1991):

$$\mathbf{k}_M = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1}{L_0^3} & \frac{c_2}{L_0^2} & 0 & \frac{-c_1}{L_0^3} & \frac{c_3}{L_0^2} \\ 0 & \frac{c_2}{L_0^2} & \frac{r_{ii}EI}{L_0} & 0 & \frac{-c_2}{L_0^2} & \frac{r_{ij}EI}{L_0} \\ \frac{-EA}{L_0} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c_1}{L_0^3} & \frac{-c_2}{L_0^2} & 0 & \frac{c_1}{L_0^3} & \frac{-c_3}{L_0^2} \\ 0 & \frac{c_3}{L_0^2} & \frac{r_{ij}EI}{L_0} & 0 & \frac{-c_3}{L_0^2} & \frac{r_{jj}EI}{L_0} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

na qual $c_1 = EI(r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj})$, $c_2 = EI(r_{ii} + r_{ij})$ e $c_3 = EI(r_{ij} + r_{jj})$. A matriz de transformação \mathbf{R} é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo β , denotados por s e c na Equação (15), são dadas por, respectivamente:

$$c = \cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}, \quad (16)$$

$$s = \sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}. \quad (17)$$

A matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais \mathbf{K}_G é calculada como se segue (Crisfield, 1991; Yaw, 2009):

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T), \quad (18)$$

em que os vetores \mathbf{z} e \mathbf{r} são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad (19)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T. \quad (20)$$

O vetor de forças internas elementar \mathbf{F}_{el} é determinado no sistema global de coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T, \quad (21)$$

sendo \bar{M}_1 e \bar{M}_2 calculados de acordo com as Equação (7) e a matriz \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

2.2 Problema Estrutural e Método de Solução

O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por (Maximiano et al., 2014; Souza et al., 2022):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (23)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u}) e λ é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento do vetor de forças externas \mathbf{F}_r . O sistema dado em Equação (23) tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor \mathbf{u} com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, uma equação de restrição $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ é adicionada ao sistema.

A solução aproximada desse sistema é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo em que, para uma sequência do parâmetro de carga λ , determina-se uma sequência do correspondente incremento de deslocamentos \mathbf{u} . O método iterativo de dois passos de Potra e Pták (1984), o qual foi desenvolvido para encontrar uma raiz aproximada de uma função não linear do tipo $f(x) = 0$, foi adaptado num procedimento incremental por Souza et al. (2018), cujas equações iterativas são (Souza et al., 2022):

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}, \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (25)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})], \quad (26)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}, \quad (27)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)}, \quad (28)$$

sendo $\delta \mathbf{u}_i$, com $i = 1, 2$, os subincrementos do vetor de deslocamentos. O superíndice $(k + 1)$ nessas equações indica a iteração corrente e (k) indica a iteração anterior, no passo de carga atual.

Ao longo do processo iterativo, a determinação da correção do subincremento de carga ($\delta \lambda$) é função de uma dada estratégia de iteração ou equação de restrição imposta ao problema. Uma boa estratégia de controle de iteração deve ser eficiente computacionalmente, de maneira a identificar o ponto limite e ultrapassá-lo na trajetória de equilíbrio.

A técnica de iteração baseada no Resíduo Ortogonal foi proposta por Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1995). Nessa técnica, o subincremento de carga é obtido a partir da condição de ortogonalidade entre o vetor de forças desequilibradas \mathbf{g} da iteração corrente e o incremento de deslocamento correspondente $\Delta \mathbf{u}$. As correções dos subincrementos de carga no ciclo iterativo, $\delta \lambda_i^{(k+1)}$, com $i = 1, 2$, são calculados por:

$$\delta \lambda_1^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{F}_r}, \quad (29)$$

$$\delta \lambda_2^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{F}_r}, \quad (30)$$

em que o $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o vetor incremento de deslocamento obtido na iteração anterior (k) . Esse vetor na iteração corrente $(k+1)$ é determinado pela expressão:

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}. \quad (31)$$

A equação para o incremento inicial do parâmetro de carga é dada por (solução predita):

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (32)$$

em que Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão (Crisfield, 1991):

$$\Delta l = {}^0 \Delta l \left(\frac{k_d}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (33)$$

na qual ${}^0 \Delta l$ representa o incremento inicial de comprimento de arco no passo de carga inicial, k_d é o número desejável de iterações para a convergência do processo iterativo corrente e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior. Na Figura 2 é mostrado o resumo da estratégia de incremento de carga e iteração.

2.3 Construção da Malha de Elementos Finitos

O modelo estrutural de uma estrutura deve conter informações acerca das dimensões e apoios, do carregamento aplicado e das propriedades físicas e geométricas. Na Figura 3 é ilustrado um exemplo de uma estrutura de um pilar com comprimento L_0 e rigidezes à flexão EI e axial EA , o qual é discretizado por três elementos corrotacionais híbridos e quatro nós. As dimensões são definidas com base no sistema global de coordenadas cartesianas (eixo de coordenadas horizontais X e eixo de coordenadas verticais Y).

O elemento híbrido tem dois nós e possui molas rotacionais com comprimento nulo em suas extremidades. Cada nó apresenta três graus de liberdade por nó (translação horizontal u , translação vertical v e rotação θ), totalizando seis graus de liberdade.

De acordo com a Figura 3, um mesmo nó da malha pode pertencer a mais de um elemento (como os nós “2” e “3”), sendo que os nós são responsáveis pela conectividade da estrutura. Também, observa-se que cada elemento m apresenta duas rigidezes rotacionais ($S_{R1}^{(m)}$ e $S_{R2}^{(m)}$). O elemento 1 da malha ($m = 1$), por exemplo, tem o nó inicial “1” com rigidez $S_{R1}^{(1)}$ e o nó final “2” com rigidez $S_{R2}^{(1)}$.

Na ligação é considerado somente o efeito provocado pelo momento fletor, variando-se a rigidez rotacional S_{Ri} . No caso de a ligação ser idealmente flexível, considera-se $S_{Ri} \cong 0$ e para ligação totalmente rígida, $S_{Ri} \rightarrow \infty$.

1. Incremento de carga: NP = 1, 2, ..., n_{máx}

1.1 Solução predita (k = -1):

$$\delta \mathbf{u}_r^{(0)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(0)})]^{-1} \mathbf{F}_r(\Delta P)$$

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r^{(0)}\|}$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(0)} = \pm \Delta \lambda^{(0)} \delta \mathbf{u}_r^{(0)}$$

1.2 Ciclo de iterações (k = 0, 1, ...):

$$\delta \lambda_1^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{F}_r(\Delta P)}$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r(\Delta P) + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})]$$

$$\delta \lambda_2^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \mathbf{F}_r(\Delta P)}$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r(\Delta P) + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})]$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)}$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}$$

Pare o ciclo iterativo quando:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})\| < \text{tol}_1 \|\mathbf{F}_r(\Delta P)\| \text{ ou } \|\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}\| < \text{tol}_2 \|\Delta \mathbf{u}^{(k+1)}\|$$

1.3 Se k = k_{máx},

Saia do loop (não houve convergência)

Senão

Atualize o comprimento de arco Δl:

$$\Delta l = {}^0 \Delta l \left(\frac{k_d}{t_k} \right)^{0,5}$$

Faça novo incremento de carga

Figura 2 - Resumo da estratégia de incremento de carga e iteração.

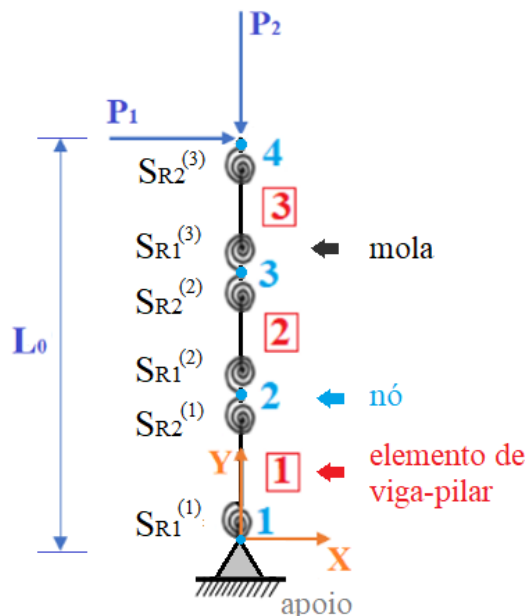


Figura 3 - Exemplo de construção da malha de elementos finitos.

3. Resultados e Discussão

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de dois problemas, um pilar e um pórtico, com comportamento não linear geométrico encontrados na literatura, com o fim de verificar a aplicabilidade e o desempenho do elemento corrotacional híbrido. Salienta-se que as unidades de medida dos problemas foram mantidas conforme as referências bibliográficas originais. O peso próprio das estruturas é desprezado nas simulações. Supõe-se que o material que constitui os elementos estruturais tenha relação constitutiva elástica linear.

3.1 Pilar com Apoio Semirrígido

Considere o pilar com apoio semirrígido na Figura 4, sujeito a uma força vertical P e a uma força lateral de $0,01 P$, ambas aplicadas no topo. As propriedades da estrutura são: seção transversal quadrada com área $A = (0,1 \times 0,1) \text{ m}^2$ e módulo de elasticidade longitudinal $E = 210 \text{ GPa}$. Nas simulações, são considerados os seguintes parâmetros para o método de solução: comprimento de arco inicial ${}^0\Delta l = 0,1$; tolerâncias $\text{tol}_1 = \text{tol}_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; número desejável de iterações por passo de carga $k_d = 5$; número máximo de iterações $k_{\text{máx}} = 150$; e incremento de carga $\Delta P = 1,0 \text{ N}$. Adota-se comportamento elástico linear para o material. A estrutura foi discretizada por dez elementos corrotacionais híbridos de igual comprimento.

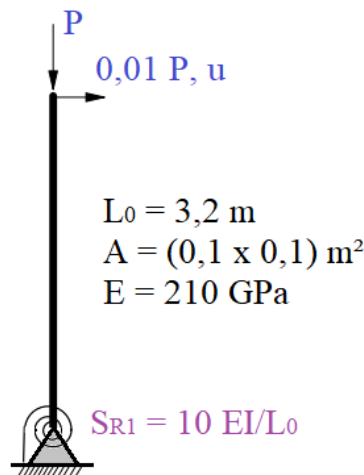


Figura 4 - Modelo estrutural do pilar com apoio semirrígido.

A Figura 5 mostra as trajetórias de equilíbrio considerando o apoio rígido ($S_{R1}^{(1)} = 1,0 \times 10^{25} \text{ N m/rad}$) ou semirrígido ($S_{R1}^{(1)} = 10 EI/L_0 \text{ N m/rad}$), havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Ye e Xu (2017). Nota-se nas trajetórias que há um ponto limite de deslocamento, em que a tangente é vertical. As demais rigidezes rotacionais dos elementos são consideradas iguais a $1,0 \times 10^{25} \text{ N m/rad}$. Para a análise não linear com apoio rígido, o valor do número máximo de passos de carga $n_{\text{máx}}$ é igual a 116 e para a análise não linear com apoio semirrígido, $n_{\text{máx}} = 135$.

A partir das trajetórias apresentadas na Figura 5, pode-se constatar a forte influência da rigidez rotacional da ligação no comportamento não linear e estabilidade do sistema estrutural em análise. No caso das simulações com a conexão semirrígida, as trajetórias obtidas das análises linear (hipótese de deformações infinitesimais) e não linear geométrica ficam próximas para pequenas intensidades da carga P (quando as deformações na estrutura ainda são bastante pequenas). Contudo, à medida que as deformações aumentam no pilar, evidencia-se o efeito de segunda ordem no mesmo. A configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 30, 60, 100$ e 135) para a análise não linear do pilar com apoio semirrígido são mostradas na Figura 6.

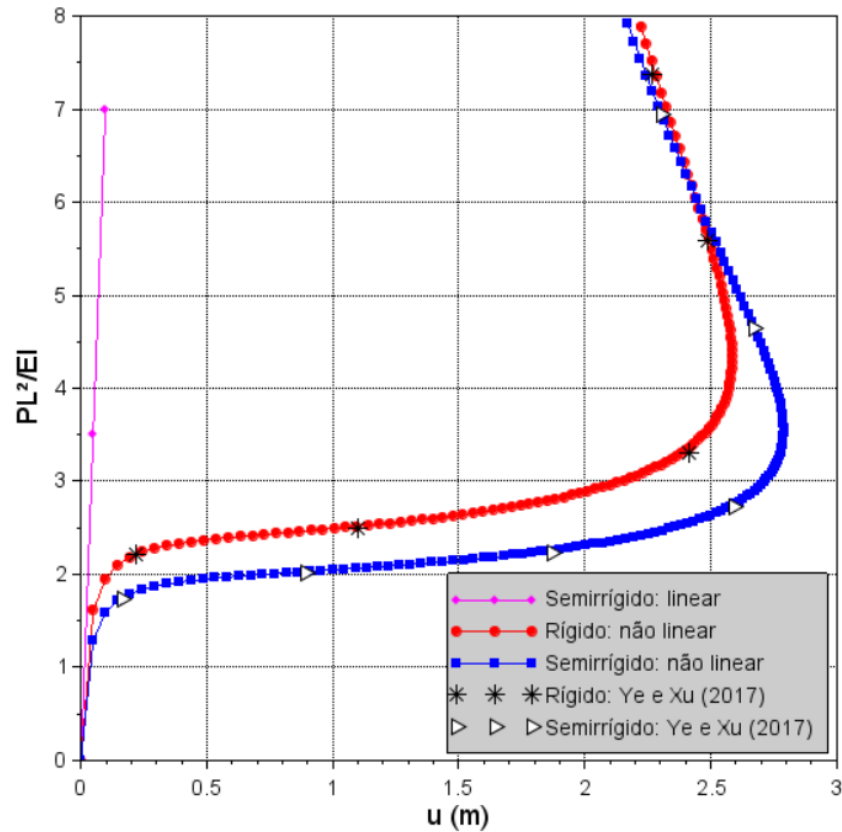


Figura 5 - Trajetórias de equilíbrio do pilar com apoio rígido e semirrígido.

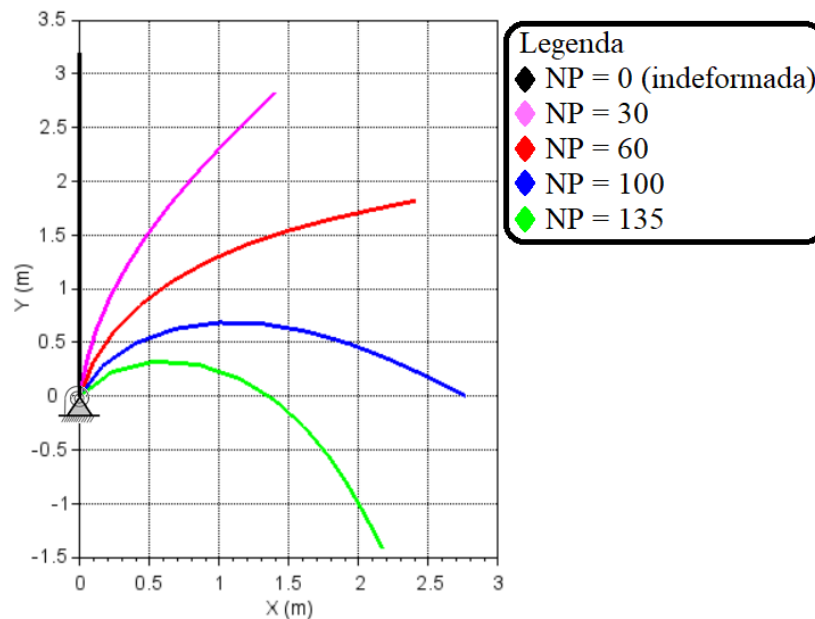


Figura 6 - Configurações deformadas e indeformada do pilar com apoio semirrígido.

3.2 Pórtico de Lee com Ligação Viga-Pilar Semirrígida

As propriedades de geometria, carregamento e seção transversal do pórtico de Lee com apoio semirrígido são mostradas na Figura 7. Este problema foi estudado por Ibrahim e Ismael (2016) por meio do programa ANSYS, utilizando o elemento *COMBIN14* para simular a ligação semirrígida e o elemento *BEAM3* para discretizar o pilar e a viga. A malha de elementos finitos utilizada aqui consiste de 16 elementos corrotacionais híbridos e 17 nós. Três valores para a rigidez rotacional da mola, em kN mm/rad, na ligação viga-pilar (nó “9”) são considerados: rígido ($S_{R1}^{(9)} = 1,0 \times 10^{25}$) e

semirrígido ($S_{R1}^{(9)} = 4EI/L_0$ e $S_{R1}^{(9)} = 10EI/L_0$). As demais rigidezes rotacionais dos elementos da malha são consideradas iguais a $1,0 \times 10^{25}$ kN mm/rad.

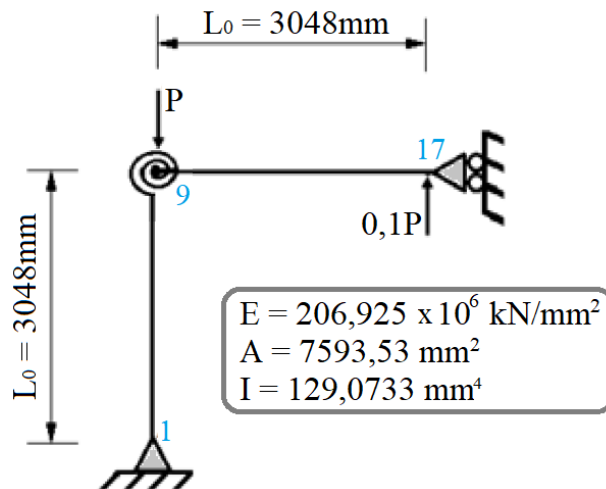


Figura 7 - Modelo estrutural do pórtico de Lee com ligação semirrígida.

A Figura 8 apresenta a curva deslocamento vertical no nó “17” *versus* carga P, havendo razoável concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Ibrahim e Ismael (2016). Nas simulações numéricas, são adotados os seguintes parâmetros para o método de solução: comprimento de arco inicial ${}^0\Delta l = 50$; tolerâncias $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-7}$; número desejável de iterações por passo de carga $k_d = 5$; número máximo de iterações $k_{m\acute{a}x} = 150$; e incremento de carga $\Delta P = 1,0$ kN.

As trajetórias na Figura 8 mostram que, à medida que o valor da rigidez rotacional da ligação viga-pilar diminui, os deslocamentos aumentam conforme aumenta a intensidade da carga P. Além disso, vê-se que as curvas ficam próximas entre si para os primeiros incrementos de carga, havendo maior diferença quando a estrutura sofre grandes deslocamentos. Sendo assim, a diminuição da rigidez da ligação ocasiona o aumento da flexibilidade do pórtico e, por consequência, influencia na estabilidade do mesmo. A configuração indeformada ($NP = 0$) e as configurações deformadas ($NP = 10, 25, 40$ e 56) para a análise não linear do pórtico com ligação semirrígida ($S_{R1}^{(9)} = 10EI/L_0$) são apresentadas na Figura 9.

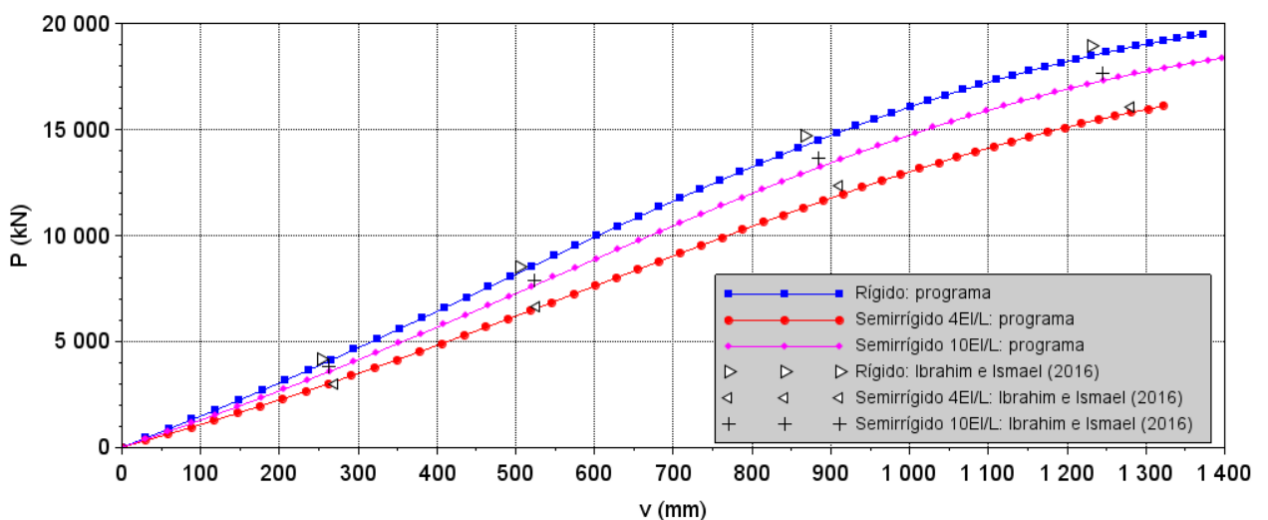


Figura 8 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de Lee.

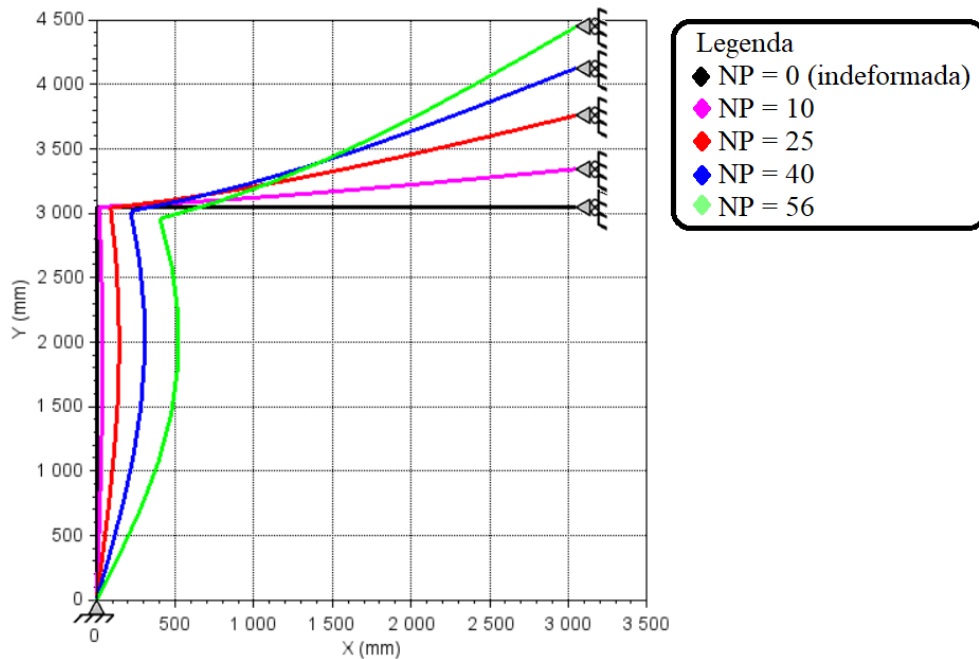


Figura 9 - Configurações deformadas e indeformada do pórtico de Lee com ligação semirrígida ($S_{Rl}^{(9)} = 10EI/L_0$).

4. Conclusão

Neste artigo, a ligação semirrígida foi simulada por meio de uma mola de comprimento nulo, a qual é anexada na extremidade do elemento finito corrotacional de viga-pilar. Pelo fato de a relação entre o momento e a rotação da mola ser linear, a rigidez rotacional permaneceu invariável no ciclo de iterações na análise incremental. As simulações numéricas foram efetuadas com um código computacional implementado com o programa livre Scilab.

O procedimento incremental-iterativo de Potra-Pták associado à técnica de Resíduo Ortogonal mostrou-se adequado para obter a solução aproximada do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural. Os resultados numéricos dos sistemas estruturais estudados mostraram que as análises não lineares com o elemento híbrido puderam prever de maneira precisa o comportamento semirrígido de ligações de estruturas planas sujeitas a carregamento estático, no que tange ao traçado das trajetórias de equilíbrio.

A hipótese simplificadora de que a ligação viga-pilar é perfeitamente flexível ou totalmente rígida em projetos estruturais pode levar a uma estimativa incorreta do comportamento mecânico do pórtico. A deformação da conexão tem um efeito negativo na estabilidade do mesmo, porque aumenta o deslocamento lateral da estrutura e causa uma diminuição da rigidez do membro que está conectado à ligação. Portanto, a flexibilidade da ligação afeta a resposta e a resistência da estrutura e, então, considerá-la no dimensionamento de pórticos é imprescindível. Além disso, as ligações semirrígidas são mais econômicas que as rígidas, visto que menos material e muito menos trabalho e tempo são necessários na sua fabricação.

Os seguintes temas são sugeridos para pesquisa futura: a consideração da não linearidade física para descrever o comportamento de vigas e pilares (modelos constitutivos baseados nas teorias da Mecânica do Dano e da Elastoplasticidade); a implementação de modelo não linear para simular a ligação semirrígida; a consideração do efeito da variação de temperatura; a consideração da interação solo-estrutura nos apoios; e a adequação do código implementado para estudos em análise dinâmica.

Agradecimentos

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código financeiro 001.

Referências

- Alves, E. C., & Paixão, J. F. M. (2017). Análise de estabilidade global em edifícios altos. *REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, 13(1).
- Charvade, A. S., & Sarayi, S. M. M. J. (2020). An Analytical Approach for Preliminary Response-Based Design of Semi Rigid Moment Resisting Frames. *CRPASE: Transactions of Civil and Environmental Engineering*, 6(3).
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons Ltd.
- Elvin, A., & Strydom, J. (2018). Optimizing structures with semi-rigid connections using the principle of virtual work. *International Journal of Steel Structures*, 18(3), 1006-1017.
- Hayalioglu, M. S., & Degertekin, S. O. (2005). Minimum cost design of steel frames with semi-rigid connections and column bases via genetic optimization. *Computers & structures*, 83(21-22), 1849-1863.
- Ihaddoudène, A. N. T., Saidani, M., & Chemrouk, M. (2009). Mechanical model for the analysis of steel frames with semi rigid joints. *Journal of constructional Steel research*, 65(3), 631-640.
- Ibrahim, A. M., & Ismael, M. A. (2016). Post buckling behavior of prismatic structural steel members with semi rigid connections. *Engineering and Technology Journal*, 34(6), 1116-1130.
- Jones, S. W., Kirby, P. A., & Nethercort, D. A. (1983). The analysis of frames with semi-rigid connections—a state-of-the-art report. *Journal of Constructional Steel Research*, 3(2), 2-13.
- Krenk, S. (1995). An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(5), 823-839.
- Krenk, S., & Hededal, O. (1995). A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 123(1-4), 95-107.
- Maximiano, D. P., Silva, A. R. D. D., & Silveira, R. A. D. M. (2014). Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Rem: Revista Escola de Minas*, 67, 143-150.
- Nethercot, D. A., Li, T. Q., & Ahmed, B. (1998). Unified classification system for beam-to-column connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 45(1), 39-65.
- Pinheiro, L., & Silveira, R. A. (2005). Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2(4), 339-367.
- Potra, F. A., & Pták, V. (1984). *Nondiscrete induction and iterative processes*. Number 103 in Research Notes in Mathematics.
- Scilab, versão 6.1.1. (2021). ESI Group.
- Silva, A. R., Batelo, E. A., Silveira, R. A., Neves, F. A., & Gonçalves, P. B. (2018). On the nonlinear transient analysis of planar steel frames with semi-rigid connections: from fundamentals to algorithms and numerical studies. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15.
- Simoës, L. M. C. (1996). Optimization of frames with semi-rigid connections. *Computers & structures*, 60(4), 531-539.
- Soares, H. B., Paccola, R. R., & Coda, H. B. (2021). A Box element to model semi-rigid connections in shell-based thin-walled structures analysis. *Engineering Structures*, 246, 113075.
- Souza, L. A. F., Castelani, E. V., Shirabayashi, W. V. I., Aliano Filho, A., & Machado, R. D. (2018). Trusses nonlinear problems solution with numerical methods of cubic convergence order. *TEMA (São Carlos)*, 19, 161-179.
- Souza, L. A. F., Letícia Soares, A., Kawamoto, R. Y. M., dos Santos, D. F., & Vanalli, L. (2022). Modelo numérico-computacional de ligação semirrígida baseado na Mecânica do Dano. *Matéria (Rio de Janeiro)*, 27.

- Van Hai, N., Nghiem, D. N. T., & Cuong, N. H. (2019). Large displacement elastic static analysis of semi-rigid planar steel frames by corotational Euler-Bernoulli finite element. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-HUCE*, 13(2), 24-32.
- Weynand, K., Jaspart, J. P., & Steenhuis, M. (1998). Economy studies of steel building frames with semi-rigid joints. In *Second World Conference on Constructional Steel Design*.
- Yaw, L. L. (2009). *2D Corotational Beam Formulation*. Walla Walla University.
- Ye, J., & Xu, L. (2017). Member discrete element method for static and dynamic responses analysis of steel frames with semi-rigid joints. *Applied Sciences*, 7(7), 714.