

## Diagnosis of cracks in beams made of composite materials

### Diagnose de trincas em vigas constituídas de materiais compósitos

Article Info:

Article history: Received 2023-01-03 / Accepted 2023-02-15 / Available online 2023-02-15

doi: 10.18540/jcecv19iss2pp15331-01e



**Henrique Cordeiro Novais**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9218-6858>

UNESP, Brasil

E-mail: [henrique.novais@unesp.br](mailto:henrique.novais@unesp.br)

**Gilberto Pechoto de Melo**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8883-1420>

UNESP, Brasil

E-mail: [gilberto.pechoto@unesp.br](mailto:gilberto.pechoto@unesp.br)

#### Resumo

O presente trabalho teve como principal intuito avaliar o comportamento dinâmico de vigas contínuas em início de trinca, constituídas de materiais compósitos, modeladas através do Método dos Elementos Finitos e Equações de Lagrange. Sendo assim, para fins comparativos, foi realizada a determinação das frequências naturais, modos de vibrar e respostas no tempo de estruturas de materiais tradicionais e compósitos para duas condições de contorno diferente da viga, no caso, biapoiada e engastada livre.

**Palavras-chave:** Materiais compósitos. Elementos finitos. Trincas. Vigas.

#### Abstract

The main purpose of this work was to evaluate the dynamic behavior of continuous beams at the beginning of cracking, made of composite materials, modeled using the Finite Element Method and Lagrange Equations. Therefore, for comparative purposes, the natural frequencies, modes of vibration and responses in time of structures made of traditional and composite materials were determined for two different boundary conditions of the beam, in this case, self-supported and free-standing.

**Keywords:** Composite materials. Finite elements. Cracks. Beams.

#### 1. Introdução

A busca crescente de materiais que proporcionam um aumento de resistência e diminuição de peso faz com que os materiais compósitos sejam cada vez mais empregado em diversos setores produtivos (Callister, 2002). Na Engenharia, muitas vezes é de extrema importância que se analise as frequências naturais dos componentes envolvidos para que elas estejam fora da faixa de rotação do sistema, evitando assim a ressonância (Chung, 2009). Segundo Tita (1999), as grandes vantagens oferecidas pelos materiais compósitos são: baixo peso associado com alta rigidez e resistência mecânica, grande versatilidade na moldagem do material e alta probabilidade na redução de custos.

Na maioria das estruturas, sejam aeronáuticas, automobilísticas ou na construção civil, as vigas contínuas tem fundamental importância por estarem presentes em todos os sistemas mecânicos. Diante disso, a diagnose de trincas através de análise dinâmica é de fundamental importância, principalmente em materiais compósitos, pois ainda é assunto que merece muitas análises. Sabe-se que, mesmo em sistemas bem projetados, a ocorrência de trincas em alguns componentes pode levar a paradas não planejadas ocasionando danos financeiros ou até situações perigosas.

Mediante a esta situação, é necessário identificar a ocorrência de trincas e analisar o comprometimento da estrutura em estudo. A posição da trinca e seu tamanho podem ser detectados por alterações na frequência natural e nos modos de vibrar. Quando uma viga é submetida a situações dinâmicas, a trinca abre e fecha alternadamente, dependendo da direção da vibração, causando variações dos parâmetros físicos do sistema tais como a rigidez.

Dessa forma, o presente trabalho consiste no desenvolvimento de modelos matemáticos de vigas contínuas considerando-se materiais compósitos e com posterior análise dinâmica para determinação de respostas no tempo, frequências naturais e modos de vibrar, quando uma trinca é iniciada. Foram realizadas simulações com diferentes materiais, principalmente os compósitos. Os modelos matemáticos foram desenvolvidos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos e as Equações de Lagrange, com base no estudo desenvolvido por Frank (1990).

## 2. Materiais e Métodos

Considerando-se a matriz de rigidez [K] e de massa [M] do elemento de viga Euler Bernoulli, com dois graus de liberdade por nó (deslocamento e rotação), sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, I o momento de inércia da seção transversal, L o comprimento do elemento,  $\rho$  a densidade e S a área de seção transversal, elas podem ser descritas pelas Equações 1 e 2, respectivamente:

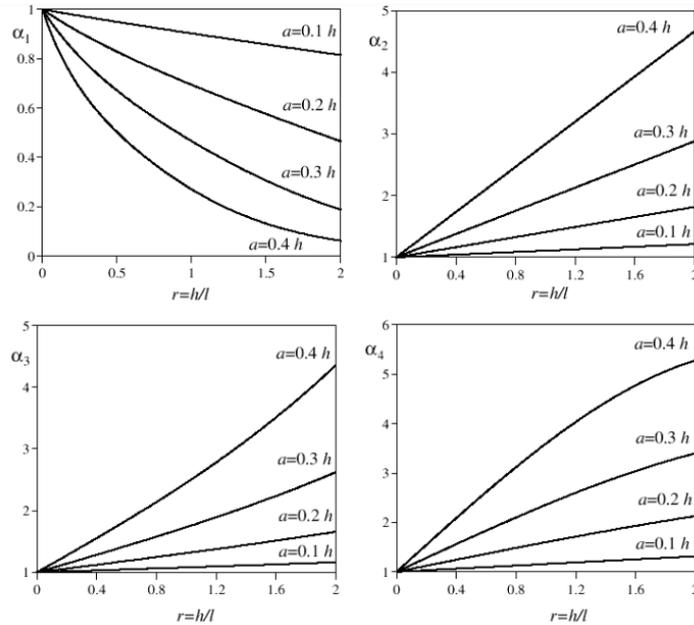
$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & -6L^2 & 12 & -6L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[M] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Em relação ao processo de formação de trincas, segundo Qian et al. (1990), de acordo com o princípio de Saint-Venant, o campo de tensão só é afetado na região adjacente à trinca. A única verdadeira alteração realizada na configuração da matriz dinâmica é relacionada à matriz de rigidez, pois a matriz de massa não sofre alteração, e o amortecimento é considerado estrutural. A alteração se dá por parâmetros proporcionais ( $\alpha$ ) que dependem da profundidade da trinca. Segundo Cacciola et al. (2003), a expressão da matriz do elemento trincado é uma função explícita de todos os outros parâmetros aqui envolvidos, sendo ela dada pela Equação 3:

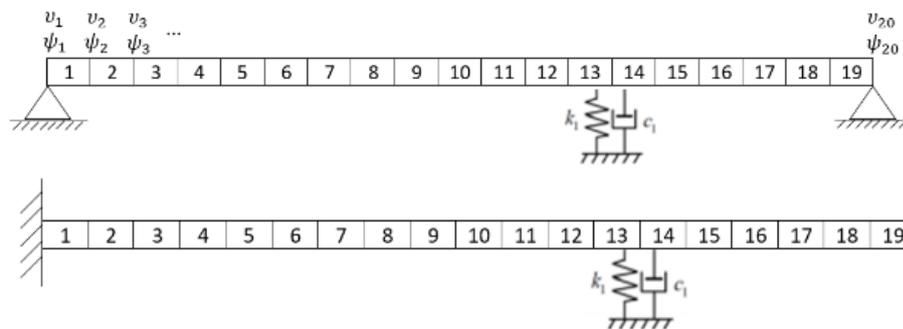
$$[K_c] = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_{11} \alpha_2 & k_{12} \alpha_2 & k_{13} \alpha_2 & k_{14} \alpha_2 \\ & k_{22} \alpha_3 & k_{23} \alpha_2 & k_{24} \alpha_4 \\ & & k_{33} \alpha_2 & k_{34} \alpha_2 \\ \text{simétrico} & & & k_{44} \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

De acordo com Cacciola et al. (2003), o coeficiente de avaliação da matriz de rigidez para condição de trinca aberta ( $\alpha$ ), é obtido por meio da Figura 1, em que se considera uma trinca variando sua profundidade de 0 a 40% da altura ( $a = 0,4h$ ), sendo o incremento de 10%. Vale ressaltar que o coeficiente  $\alpha$  é função da profundidade da trinca e da relação entre a altura e o comprimento do elemento trincado.



**Figura 1 - Coeficiente de avaliação da matriz de rigidez modelado para a condição de trinca aberta. Sendo  $r$  é a razão entre a altura e comprimento do elemento trincado ( $r=h/l$ )**

A Figura 2 apresenta uma representação das vigas contínuas utilizadas para a realização das simulações. Assim como citado, foram analisadas duas condições de contorno diferentes, a biapoada e a engastada livre.



**Figura 2 – Representação dos sistemas utilizados nas simulações**

Assim, como mostra a Figura 2, as vigas foram discretizadas em 19 elementos, contendo, portanto, 20 nós com 2 graus de liberdade cada um, sendo eles de translação na direção transversal e rotação. Dessa forma, o sistema possui um total de 40 graus de liberdade. Vale ressaltar ainda que todas as simulações foram realizadas a partir do software *MATLAB*, visando a obtenção das frequências naturais, modos de vibrar e respostas no tempo para cada situação, variando-se o material das vigas, a profundidade, a posição da trinca ao longo dos elementos e a relação entre a altura e comprimento do elemento trincado.

Os materiais simulados nesse trabalho foram os materiais compósitos compostos pela Resina Epóxi e Fibras de Vidro-E e, também, Resina Epóxi e Fibras de Carbono. Para a determinação de suas propriedades, foi utilizada a Regra das Misturas, definida por Vinson e Sierakowski (1996). As propriedades finais obtidas para cada um desses materiais compósitos se encontram na Tabela 1. A escolha desses dois materiais compósitos vai de acordo com o que propõe Callister (2002), no qual os compósitos que possuem maior relevância tecnológica devido às propriedades de alta resistência e/ou rigidez em relação ao seu peso são aqueles que a fase dispersa encontra-se na forma de fibras.

**Tabela 1 – Propriedades dos materiais compósitos obtidas a partir da Regra das Misturas.**

Propriedade	Resina + Vidro-E	Resina + Fibra de Carbono
E Longitudinal [GPa]	46,2	139,8
E Transversal [GPa]	12,4	7,3
G Plano Principal [GPa]	5,34	5,72
$\nu$	0,31	0,34
$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	2,04	1,53
E Longitudinal [GPa]	46,2	139,8
E Transversal [GPa]	12,4	7,3

Segundo Hull e Clyne (1996), os compósitos poliméricos de alta performance consistem de laminados estacados em um arranjo pré-determinado. Para a realização deste trabalho, partiu-se do princípio de que esses laminados são homogêneos e que todo o arranjo de fibras é uniforme. Além disso, considerou-se que há também uma adesão perfeita entre as matrizes e fibras, em outras palavras, desconsiderou-se a presença de imperfeições ou descontinuidades entre ambos os materiais constituintes. Além disso, para fins comparativos, foi utilizado também o aço 1040 nas simulações.

### 3. Resultados e Discussão

Para os resultados apresentados a seguir, nos casos em que há a presença de uma trinca, foi considerada a mesma situada no elemento 6 da estrutura da viga, que pode ser melhor visualizado na Figura 2. Além disso, vale ressaltar que a razão entre a altura e o comprimento do elemento trincado foi considerado, a priori, igual a 0,475.

A Tabela 2 apresenta as 5 primeiras frequências naturais obtidas para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Carbono, com e sem a presença da trinca, para a condição de contorno biapoiada.

**Tabela 2 – Frequências naturais para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno biapoiada.**

Caso	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)	5ª Freq. (Hz)
Sem trinca	109,1	433,6	975,3	1734,1	2709,9
Com trinca (10%)	113,7	459,2	985,4	1757,3	2875,3
Com trinca (40%)	112,9	459,3	985,4	1757,2	2875,3

Os resultados obtidos para o mesmo material, porém para a condição engastada livre, se encontram na Tabela 3.

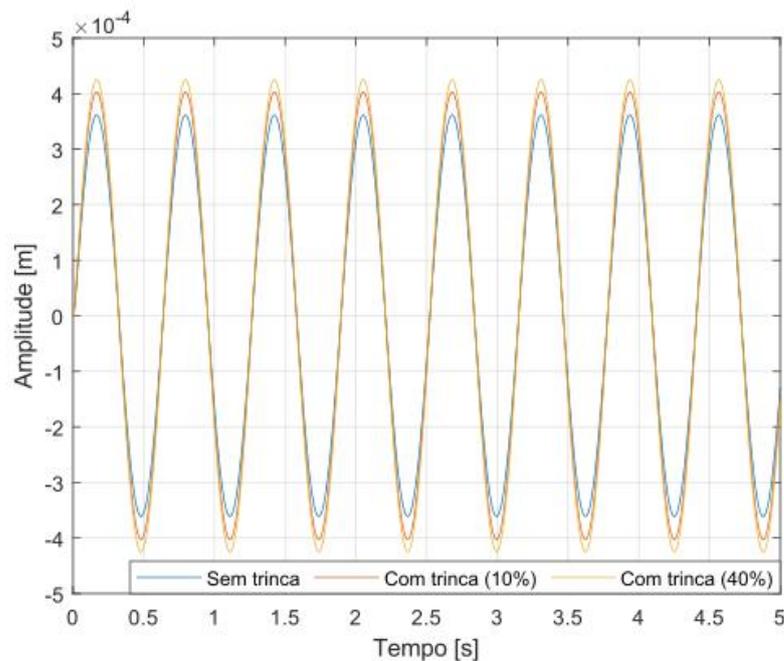
**Tabela 3 – Frequências naturais para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno engastada livre.**

Caso	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)	5ª Freq. (Hz)
Sem trinca	40,4	242,1	677,5	1327,5	2194,8
Com trinca (10%)	40,9	244,7	692,3	1329,2	2232,5
Com trinca (40%)	41,2	241,2	693,2	1329,4	2232,6

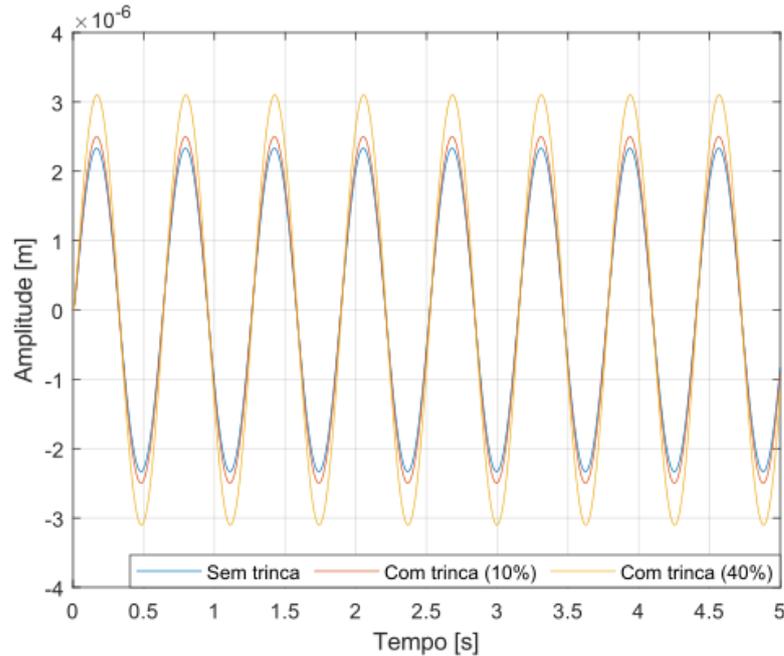
Analisando-se os resultados obtidos, nota-se que a presença das trincas tende a elevar os valores das frequências naturais do sistema. Embora sejam mudanças relativamente pequenas, que podem ser justificadas em virtude do dimensionamento utilizado, a mudança na rigidez estrutural provocada pela presença de uma trinca promoveu alterações nos parâmetros do sistema. Além disso, em relação à pequena diferença encontrada para as diferentes profundidades (10% e 40%), a justificativa está no fato da utilização de uma razão relativamente pequena entre a altura e o comprimento do elemento trincado.

Ademais, em relação às diferentes condições de contorno, pode-se notar que, em todos os casos, a viga biapoiada apresentou as maiores frequências naturais em comparação à viga engastada livre.

A análise em relação às respostas no tempo foi realizada a partir da aplicação de uma força do tipo  $F \sin(\Omega t)$  na estrutura, com um módulo igual a 30 N e uma frequência de 10 Hz. Vale ressaltar ainda que foram adotados um número total de 2048 pontos, em um intervalo de 5 segundos. As Figuras 3 e 4 apresentam os resultados obtidos para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Carbono, para as condições de contorno biapoiada e engastada livre, respectivamente.



**Figura 3 - Respostas no tempo para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno biapoiada**



**Figura 4 - Respostas no tempo para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno engastada livre**

De acordo com o que se era esperado previamente, os resultados obtidos mostram que a presença de uma trinca na estrutura faz com que as amplitudes de oscilação do sistema se tornem maiores. Vale ressaltar ainda a diferença entre as profundidades de 10% e 40%, mais notável para o caso da viga engastada livre, mostrando a importância de se estudar esse fenômeno e os impactos que ele pode provocar em uma estrutura.

Os resultados mostram também como a mudança na condição de contorno da viga tem grande influência no comportamento dinâmico do sistema. Além disso, os valores das amplitudes de movimento são relativamente pequenos, fato que pode ser explicado devido ao dimensionamento das vigas e a força aplicada.

As Figuras 5 e 6 apresentam os três primeiros modos de vibrar para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Carbono, para as condições de contorno biapoiada e engastada livre, respectivamente.

Como pode-se notar, durante as simulações a presença de uma trinca não influenciou significativamente os modos de vibrar da estrutura, em ambas as condições de contorno. Novamente, isso pode ser explicado em função do dimensionamento e da profundidade da trinca. No entanto, mesmo com esses fatores, ainda assim pode-se notar uma pequena mudança na viga biapoiada. Sendo assim, analisar os modos de vibrar de uma estrutura também é importante, uma vez que esse parâmetro é alterado em função da variação dos parâmetros físicos provocada pela trinca, dependentes de seu tamanho e posição. Além disso, é possível de se observar também como as diferentes condições de contorno influenciam diretamente os modos de vibrar da estrutura.

Partindo-se para o outro material compósito estudado neste trabalho, a Tabela 4 apresenta as 5 primeiras frequências naturais obtidas para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Vidro E, com e sem a presença da trinca, para a condição de contorno biapoiada. Os resultados obtidos para o mesmo material, porém para a condição engastada livre, se encontram na Tabela 5.

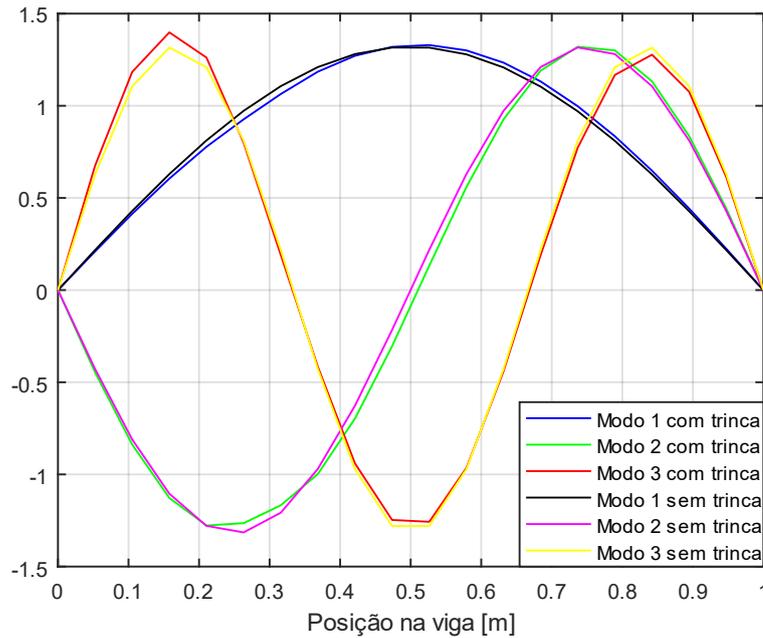


Figura 5 - Modos de vibrar para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno biapoçada

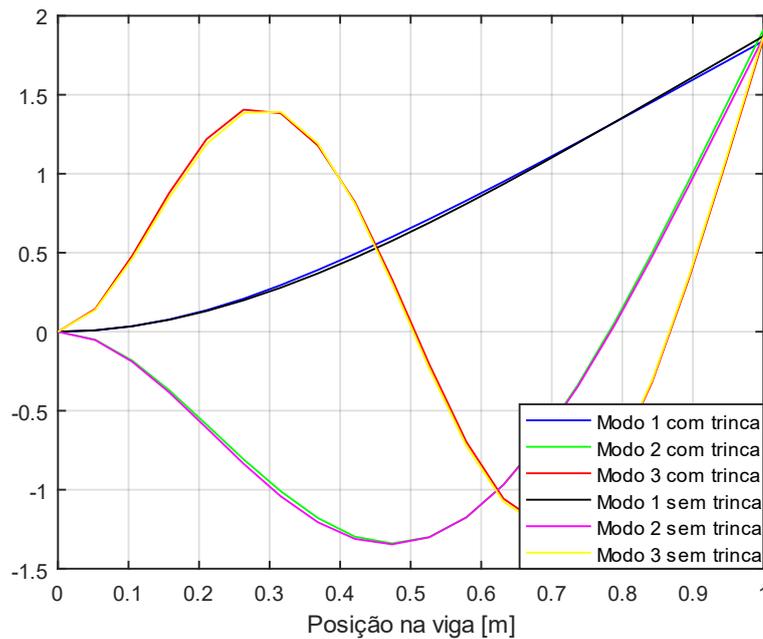


Figura 6 - Modos de vibrar para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Carbono, na condição de contorno engastada livre

Tabela 4 – Frequências naturais para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno biapoçada.

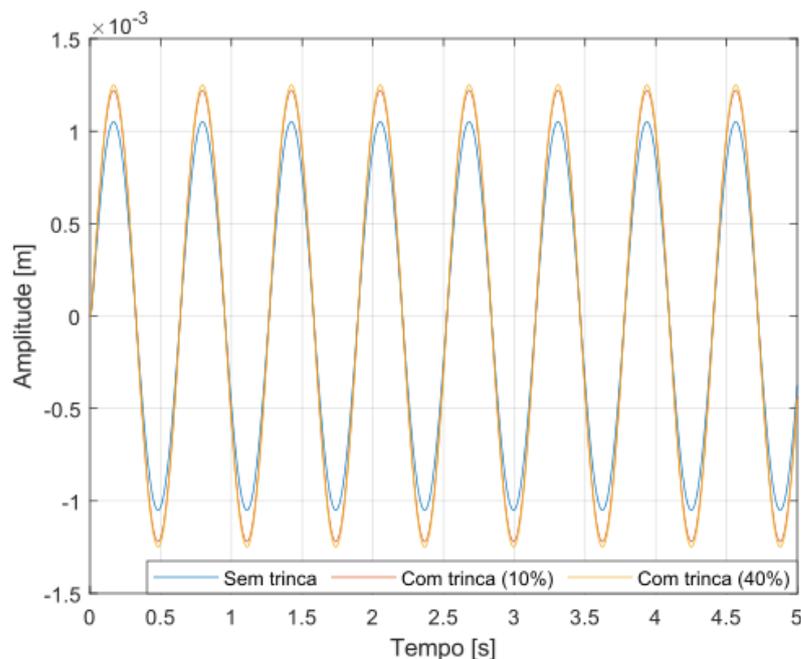
Caso	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)	5ª Freq. (Hz)
Sem trinca	55,0	216,1	485,6	863,3	1349,2
Com trinca (10%)	57,4	228,8	490,6	874,9	1431,5
Com trinca (40%)	57,8	228,8	491,2	875,5	1432,7

**Tabela 5 – Frequências naturais para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno engastada livre.**

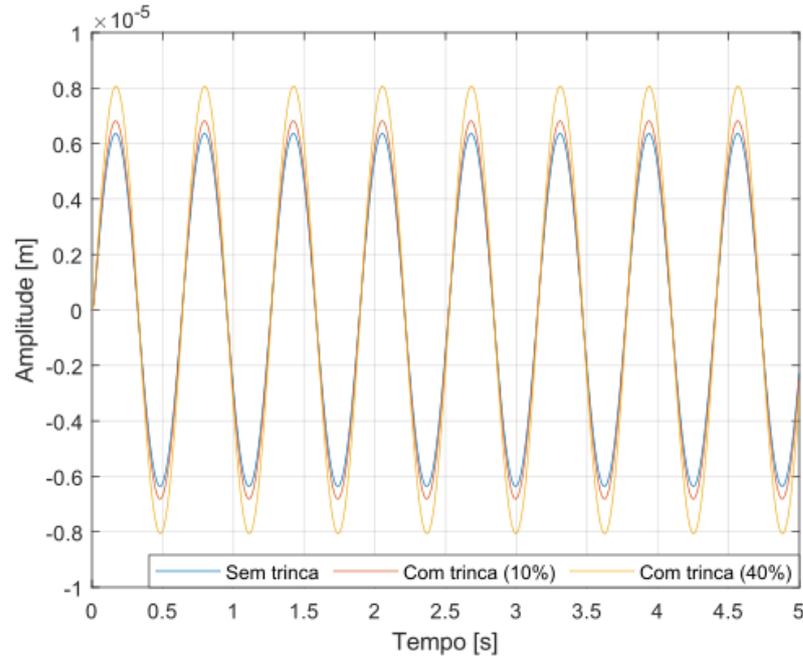
Caso	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)	5ª Freq. (Hz)
Sem trinca	21,8	120,6	337,5	660,9	1092,7
Com trinca (10%)	22,1	121,9	350,0	662,8	1111,5
Com trinca (40%)	22,5	122,8	354,5	663,5	1114,6

Os resultados obtidos para esse outro material compósito estão de acordo com aquilo que foi discutido anteriormente, isto é, em relação ao impacto das trincas e a influência das diferentes condições de contorno. Realizando-se uma comparação entre os materiais, em todos os casos, as frequências naturais do material compósito formado pela Fibra de Carbono foram maiores quando comparadas ao material compósito formado pela Fibra de Vidro E, tendo como principal motivo o elevado módulo de elasticidade apresentado pela Fibra de Carbono.

Seguindo-se o mesmo procedimento citado anteriormente, as Figuras 7 e 8 apresentam os resultados obtidos para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Vidro E, para as condições de contorno biapoçada e engastada livre, respectivamente.



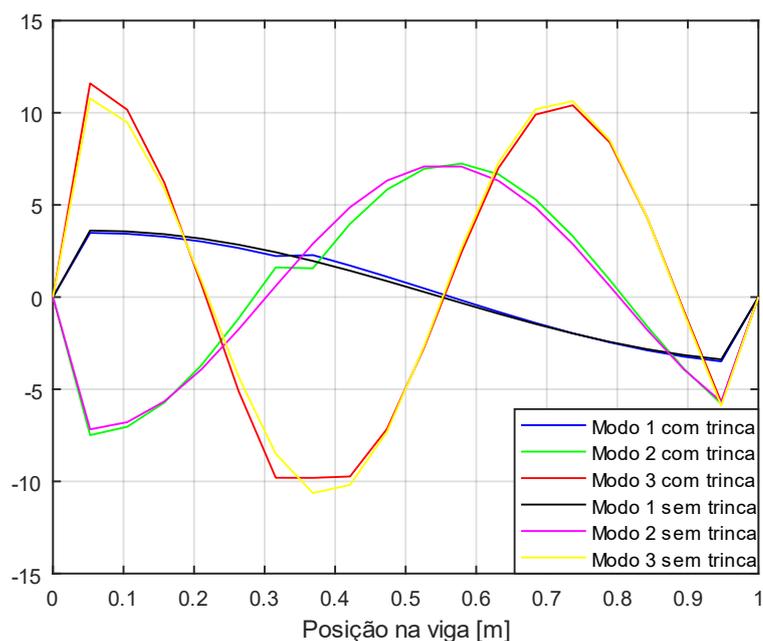
**Figura 7 - Respostas no tempo para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno biapoçada**



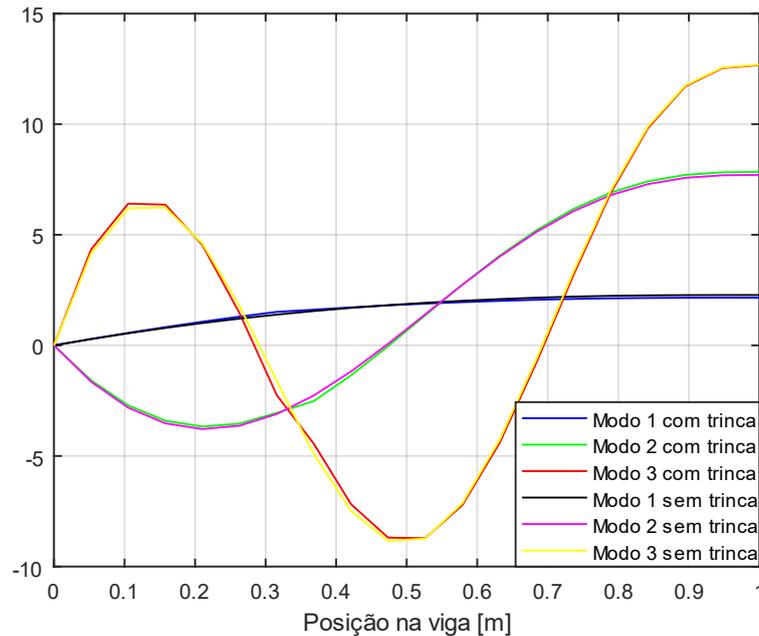
**Figura 8 - Respostas no tempo para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno engastada livre**

Novamente, as discussões levantadas anteriormente estão de acordo com as respostas no tempo obtidas para esse material. Vale ressaltar que, comparando-se as mesmas condições de contorno entre os dois materiais, o compósito formado pela Fibra de Vidro E apresentou maiores amplitudes de oscilação. Além disso, sobretudo na condição de contorno biapoiada, pode-se notar uma pequena diferença entre as amplitudes alcançadas para uma profundidade de 10% ou 40%, indicando que, de certa forma, uma viga composta desse material compósito pode ser mais sensível à presença de uma trinca.

As Figuras 9 e 10 apresentam os três primeiros modos de vibrar para o material compósito formado pela Resina Epóxi e a Fibra de Vidro E, para as condições de contorno biapoiada e engastada livre, respectivamente.



**Figura 9 - Modos de vibrar para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno biapoiada**



**Figura 10 - Modos de vibrar para a viga constituída de Resina Epóxi e Fibra de Vidro E, na condição de contorno engastada livre**

Comparando-se os modos de vibrar obtidos para cada material estudado, observa-se que, além das condições de contorno apresentarem grande influência nesse parâmetro, o próprio material da estrutura é responsável por provocar alterações nos modos de vibrar.

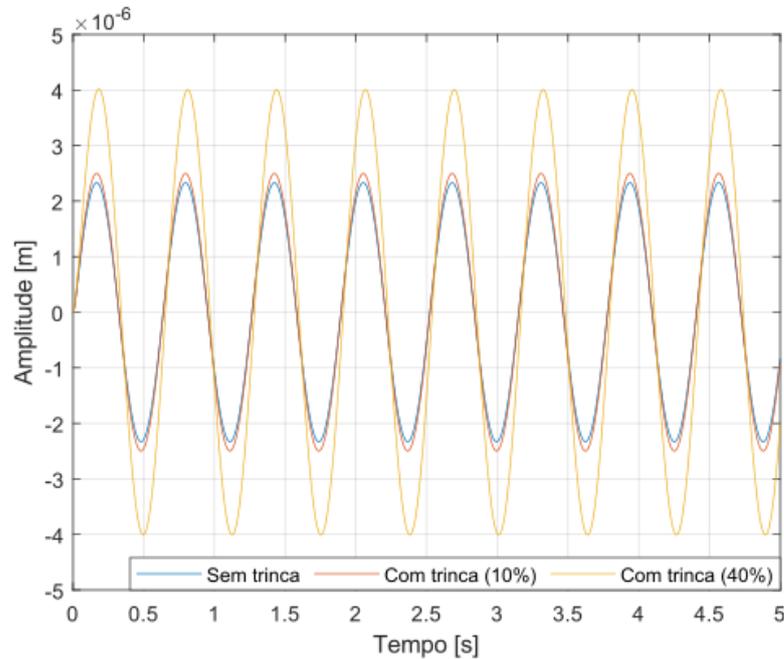
Em relação à comparação dos materiais compósitos com os materiais convencionais ou tradicionais, no caso deste trabalho com o aço 1040, vale ressaltar que a orientação das fibras apresenta caráter importante na análise. Em relação às frequências naturais, quando os materiais compósitos estavam em sua orientação longitudinal de fibra, eles apresentaram valores maiores comparados ao aço 1040, sobretudo o formado pela Fibra de Carbono. A Tabela 6 apresenta essa comparação entre ambos, para a situação de contorno engastada livre.

**Tabela 6 – Comparação entre as frequências naturais do material compósito formado pela Fibra de Carbono (FC) e o aço 1040.**

Caso	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)	5ª Freq. (Hz)
FC - Sem trinca	40,4	242,1	677,5	1327,5	2194,8
Aço – Sem trinca	21,1	127,9	358,2	701,9	1160,4
FC - Com trinca (10%)	40,9	244,7	692,3	1329,2	2232,5
Aço – Com trinca (10%)	21,4	129,3	366,1	702,7	1180,4
FC -Com trinca (40%)	41,2	241,2	693,2	1329,4	2232,6
Aço -Com trinca (40%)	21,6	130,4	368,5	703,1	1181,5

Outra característica importante que deve ser analisada no estudo do processo de formação de trincas é a posição na estrutura em que ela ocupa. Por exemplo, tomando como base o material compósito formado pela Resina Epóxi e Fibra de Carbono na condição de contorno engastada livre,

a mudança na posição da trinca do elemento 6 para o elemento 15, mostrados na Figura 2, provocou mudanças significativas nas respostas no tempo, como mostra a Figuras 11.



**Figura 11 - Respostas no tempo, na condição de contorno engastada livre, mudando-se a posição da trinca**

Comparando-se as Figuras 11 e 4, pode-se notar que as amplitudes de oscilação, sobretudo para uma profundidade de trinca igual a 40%, elevaram-se ao ser realizada a mudança na posição da trinca. Isso pode ser explicado pelo fato de o elemento 15 estar mais distante do engaste (praticamente na extremidade livre da viga) em relação ao elemento 6 estudado anteriormente, sendo assim, mais sensível ao impacto provocado por uma trinca.

Sendo assim, tendo em vista essa discussão levantada, ter o conhecimento da posição da trinca ao longo de uma estrutura é algo relativamente importante e que deve ser estudado com cuidado, uma vez que influencia diretamente no comportamento dinâmico do sistema.

Ademais, vale ressaltar que a relação entre a altura e o comprimento do elemento trincado é outro parâmetro que deve ser levado em consideração no estudo da formação de trincas. Assim como mostra o gráfico da Figura 1, a matriz de rigidez do elemento é totalmente dependente desses coeficientes apresentados, de forma que, alterando-se essa razão, ocorrerá variações nos parâmetros físicos do sistema, tais como a rigidez, que influenciarão o comportamento dinâmico da estrutura.

#### 4. Conclusão

O estudo desenvolvido no presente trabalho permitiu avaliar o comportamento dinâmico de vigas contínuas em início de trinca, constituídas de materiais compósitos e materiais tradicionais. Nesse aspecto, inclui-se as frequências naturais, respostas no tempo e modos de vibrar.

A partir do projeto, foi possível de analisar quais os principais parâmetros que influenciam e como eles modificam o comportamento de estruturas quando há a presença de uma trinca, sendo eles: a posição da trinca, sua profundidade, o material que é composto a estrutura e a sua própria condição de contorno.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte fornecido pelo CNPq e pela Iniciação Científica PROPe-UNESP.

## Referências

- Cacciola, P., Impollonia, N., & Muscolino, G. (2003). Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise. *Computers & Structures*, 81(18-19), 1773–1782. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00201-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00201-3)
- Callister, W. (2002). *Ciência e Engenharia de Materiais: uma introdução*. Livros Técnicos e Científicos S.A.
- Chung, D. D. L. (2009) *Composite Materials: science and applications*. Springer
- Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy. *Automatica*, 26(3), 459–474. doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(90\)90018-D](https://doi.org/10.1016/0005-1098(90)90018-D)
- Hull, D., Clyne, T. W. (1996). *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press
- Qian, G.-L., Gu, S.-N., & Jiang, J.-S. (1990). The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack. *Journal of Sound and Vibration*, 138(2), 233–243. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90540-G](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90540-G)
- Tita, V. (1999). *Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais compósitos poliméricos reforçados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil
- Vinson, J. R., Sierakowski, R. L. (1996). *The Behaviour os Structures Composed of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers