IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS LINEARES ARX E ARMAX EM PROCESSO DE REFRIGERAÇÃO

T. S. S. DANTAS¹, I. C. FRANCO^{1,2}, A. M. F. FILETI¹, F. V. SILVA¹

¹ Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Química

² Centro Universitário da FEI, Departamento de Engenharia Química

E-mail: flavio@feq.unicamp.br

RESUMO: *Processos de refrigeração estão presentes em diversas áreas da vida cotidiana, desde ar-condicionado e geladeiras residenciais até aplicações que envolvem a preservação de produtos com alto valor agregado. A necessidade de desenvolver novas estratégias de controle pode surgir. Um modelo que represente as características dinâmicas do sistema pode-se facilitar esta tarefa reduzindo custos e tempo através da simulação. Neste trabalho desenvolveu-se modelos esparsos ARX e ARMAX para a predição da temperatura de evaporação de um sistema de refrigeração utilizando-se o algoritmo FROLS para a determinação dos critérios de desempenho ERR e AOE. Os modelos desenvolvidos apresentaram boa performance tendo AOE de 0,0419 °C para o modelo ARX e 0,0250 °C para o modelo ARMAX*

PALAVRAS-CHAVE: Identificação de Sistemas, ARX, ARMAX, Sistemas de Refrigeração.

1. INTRODUÇÃO

Simular modelos matemáticos que representam, com boa performance, o comportamento de um processo existente ou em fase de desenvolvimento possibilita explorar suas condições operacionais e obter conhecimento sobre o processo, sem que haja dispêndios com experimentos, proporcionando estudos relacionados a questões importantes tais como: supervisão, controle, detecção de falhas, processamento de sinais, sensores virtuais, controle de qualidade, redução do consumo energético, otimização, etc.

Diversos estudos de modelagem, com base em identificação de sistemas, vêm sido realizados para o melhor entendimento da dinâmica de sistemas de refrigeração industrial. Estes estudos vão desde a utilização de técnicas convencionais de identificação (Yiu e Wang, 2007; Romero *et al.*, 2011; Piedrahita-Velásquez *et al.* 2014; Lara *et al.*, 2016; Rasmussen *et al.*, 2016), utilização de modelos de estado de espaço (Lin e Yeh, 2007; Qi e Deng, 2008) e utilização de técnicas de inteligência artificial (IA), tais como, redes neurais artificiais, lógica fuzzy e neuro-fuzzy (Aprea *et al.*, 2004; Ertunc e Hosoz, 2008; Chiou *et al.*, 2009; Franco *et al.*, 2011; J; Hosoz *et al.*, 2011; Zhen *et al.*, 2015; Saleh e Ayman, 2016; Cao *et al.*, 2016).

Quanto mais complexo o processo, mais complexo o modelo que o representa sendo mais difícil a compreensão de todos os fenômenos que regem o sistema e nem sempre temos

conhecimentos necessários para compreender e modelar um processo complexo. Além disso, um modelo complexo pode ser inapropriado para aplicações que demandam predições em tempo real, como em controle de processos. Através da identificação de sistemas pode-se obter modelos, a partir da informação contida nos sinais de entrada e saída do processo, mesmo na presença de ruído, com a vantagem de possuir baixo custo computacional para simulação (Wei *et al.*, 2004).

Geralmente, nem todos os termos e variáveis são importantes no desenvolvimento de um modelo, os que não apresentam uma contribuição significativa para explicar a saída de interesse podem ser excluídos resultando em uma representação parcimoniosa, ou seja, uma representação desejada com o menor número possível de variáveis de predição, sem perda significativa de exatidão. Diversos tipos de algoritmos de detecção de estrutura podem ser utilizados para modelos lineares e não-lineares para este fim (Chen *et al.*, 1989; Aguirre e Billings, 1995; Wei *et al.*, 2004). Neste trabalho realizou-se o desenvolvimento de modelos lineares autoregressivos ARX – *autoregressivo com entradas exógenas* e ARMAX – *autoregressivo com média móvel e entradas exógenas* para a predição da temperatura de evaporação (Te) de um sistema de refrigeração industrial utilizando como critérios de desempenho a *Taxa de Redução de Erro (ERR)* e o *Erro Médio de Simulação (AOE)* por meio do algoritmo FROLS (*Fast Recursive Orthogonal Least Square*), (Chen *et al.*, 1989).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelos Caixa Preta

Uma decisão importante a ser tomada ao se desenvolver um modelo é qual a estrutura mais apropriada para o sistema que se pretende modelar. Na Tabela 1 são apresentadas as estruturas lineares autoregressivas avaliadas neste trabalho.

Tabela 1 – Modelos autoregressivos avaliados

Modelo	Estrutura
ARX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + v(k)$ (1)
ARMAX	$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)v(k)$ (2)

Onde: q^{-1} é um operador de atraso tal que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$; $v(k)$ é um ruído branco; $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$ são polinômios do tipo $A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$.

Nos modelos com média móvel (ARMAX) o polinômio $C(q)$ é conhecido como filtros de ruído. Se os parâmetros do modelo são estimados corretamente com uma estrutura adequada, então o estimador de mínimos quadrados não sofre polarização, $v(k)$ é verdadeiramente uma variável aleatória com média zero (estacionária) e a função de autocorreção dos resíduos está dentro da banda de 95% de confiança para todos os atrasos diferentes de zero (independente). Alguns métodos de identificação são denominados por alguns autores como métodos baseados no branqueamento dos erros de predição (Aguirre, 2000). As Equações (1) e (2) podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$y(k) = \psi_k^T(k-1)\hat{\theta}_k + v(k) \quad (3)$$

Onde: $\hat{\theta}_k$ é o vetor de parâmetros lineares e $\psi_k^T(k-1)$ é a matriz de regressores até o instante $(k-1)$.

2.2 Estimador de mínimos quadrados ortogonais e razão de redução de erro (ERR)

O objetivo é transformar o modelo não ortogonal, Equação 4, em um modelo auxiliar do tipo $y(k) = \sum_{i=1}^M g_i w_i(k) + v(k)$, no qual qualquer combinação de regressores $w_i(k)$ e $w_j(k)$ são ortogonais em relação aos outros ($w_i(k)^T w_j(k) = 0$). Os termos candidatos não ortogonais $p_1(k), p_2(k), \dots, p_i(k)$ compõem as colunas de ψ que devem ser linearmente independentes. O procedimento inicial de ortogonalização de Gram-Schmidt pode ser resumido e representado por, (Billings, 2013):

$$\begin{bmatrix} w_1(k) = p_1(k) \\ w_2(k) = p_2(k) - a_{1,2} w_1(k) \\ w_3(k) = p_3(k) - a_{1,3} w_1(k) - a_{2,3} w_2(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Onde:

$$a_{r,m} = \frac{\sum_{k=1}^N p_m(k) w_r(k)}{\sum_{k=1}^N w_r^2(k)} \quad (5)$$

O vetor de parâmetros $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]$ está relacionado com os parâmetros ortogonais $g = [g_1, g_2, \dots, g_M]$ de maneira similar:

$$\begin{bmatrix} \theta_M = g_1 \\ \theta_{M-1} = g_{M-1} - a_{M-1,M} \theta_M \\ \theta_{M-2} = g_{M-2} - a_{M-2,M-1} \theta_{M-1} - a_{M-2,M} \theta_M \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$g_i = \frac{\sum_{k=1}^N y(k) w_i(k)}{\sum_{k=1}^N w_i^2(k)}, i = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

Na formulação do modelo em base ortogonal, assume-se que se uma matriz de regressores $\psi \in \mathbb{R}^{m,n}$ é retangular fina ($m > n$) e suas colunas possuem posto pleno, então pode-se decompô-la por $\psi = QR$. Onde $R \in \mathbb{R}^{m,n}$ é uma matriz triangular superior que possui inversa e $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$ é uma matriz com colunas ortogonais. O resultado da sequência de cálculos das Equações 4 e 5 resultará na resolução das colunas R^{-1} e consequentemente de Q, já que $Q = \psi R^{-1}$. A resolução do vetor de parâmetros do modelo auxiliar, para o conjunto

completo de regressores p_i , pode ser representada pela pseudo-inversa de Moore-Penrose, Equação 8:

$$g = (Q^T Q)^{-1} Q^T y \quad (8)$$

Note que $Q^T Q$ é uma matriz diagonal com componentes $q_{i,j} = 0$ e $q_{i,i} = w_i^T w_i \neq 0$, implicando que o subespaço ocupado pela base ortogonal é o mesmo ocupado pelos regressores $p_1, p_2, \dots, p_i$. Então a forma ortogonal da Equação 7 pode ser expressa pela Equação 9:

$$y = (\psi R^{-1})(R\theta) + e = gQ + e \quad (9)$$

Sendo o resíduo de predição do modelo (Equação 9) não correlacionado com as entradas passadas do sistema. A variância ou energia total do sinal pode ser expressa de acordo com a Equação 10, (Billings, 2013).

$$\frac{1}{N} Y^T Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M g_i^2 w_i^T w_i + \frac{1}{N} e^T e \quad (10)$$

A variância do sinal de saída é composta por duas contribuições, uma que vem dos regressores na sua base ortogonal e a segunda vem de fontes não explicadas. É possível testar cada regressor ortogonal de maneira independente e quantificar o quanto cada um explica em termos de porcentagem de variância do sinal $y(k)$. Após a seleção do primeiro regressor, pode-se estimar novamente qual o segundo regressor que melhor explica a variância remanescente em $Y^T Y$. Define-se essa razão entre variância do sinal de saída e variância do regressor w_i como a taxa de redução de erro, ou ERR_i , representado pela Equação 11:

$$ERR_i = \frac{g_i^2 \langle w_i, w_i \rangle}{\langle y, y \rangle} \times 100\% \quad (11)$$

A taxa de redução de erro, ERR_i , e o método dos mínimos quadrados ortogonais são a base para o algoritmo FROLS (*Fast Recursive Orthogonal Least Square*) desenvolvido por Chen *et al.*, (1989).

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Uma planta piloto de refrigeração por compressão a vapor existente no Laboratório de Controle e Automação de Processos (LCAP) da FEQ/UNICAMP, Figura 1, foi utilizada para obter os dados de identificação e validação do modelo. O protótipo de refrigeração está equipado com sensores de temperatura Pt100, pressostatos, inversores de frequência e medidores de vazão mássica e volumétrica, Figura 2. A aquisição de dados foi realizada utilizando um Controlador Lógico Programável (CLP) por meio do protocolo de comunicação OPC (*Open Platform Communications*). Na Tabela 2 são demonstrados os sensores que compõem o sistema de refrigeração assim como suas principais informações.

Figura 1 – Planta piloto de refrigeração industrial

Figura 2 – Diagrama de instrumentação do sistema de refrigeração

Tabela 2 – Instrumentação que compõem o sistema de refrigeração

Sensor	Tipo	Range	Sensibilidade	Unidade
Temperatura	Pt100	-50 a 150	0.0500	°C
Pressão	Piezoresistivo	0 a 40	0.0100	bar
Pressão	Piezoresistivo	0 a 10	0.0025	bar
Vazão volumétrica	Turbina	1.14 a 11.50	0.0025	m ³ ·h ⁻¹
Vazão mássica	Coriolis	0 a 60	0.0150	g·s ⁻¹

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente utilizou-se uma variação do algoritmo FROLS proposta Wei *et al.*, (2004) para a seleção inicial de termos e variáveis, que se baseia na aproximação de modelos lineares em processos não-lineares em determinados estados estacionários. Normalmente isto leva a estimativas polarizadas devido ao fato de que os resíduos coloridos $e(k)$ contêm ruído e os efeitos não-lineares não-modelados. Contudo, a aplicação do método de identificação de Wei *et al.*, (2004) nos dados do processo apresentaram resultado inconclusivos em relação a estrutura adequada para o modelo.

Porém foi provado matematicamente por Wei *et al.*, (2004), que apesar das estimativas de parâmetros serem polarizadas, os valores relativos do critério ERR_i se mantêm inalterados. Identificou-se então modelos ARX dos 2 primeiros até 25 primeiros termos mais importantes de acordo com o critério ERR do algoritmo FROLS (Chen *et al.*, 1989) e seus parâmetros foram estimados pelo método dos mínimos quadrados ortogonais. Os modelos foram identificados com os dados do experimento de validação e calculou-se o critério AOE (Erro Médio de Saída), utilizado por Yiu e Wang, (2007), para cada modelo, Figura 3.

Figura 3 – Resultados obtidos utilizando o critério de desempenho AOE de Yiu e Wang, (2007) e algoritmo FROLS de Chen *et al.*, 1989.

O modelo identificado com os 5 termos mais importantes pelo critério ERR_i , apresentado na Tabela 3, foi o modelo que apresentou a melhor relação AOE/nu como pode ser visto na Figura 3. Os 20 modelos com um número maior de termos não apresentam melhora significativa neste critério de desempenho. Isto ocorre porque os termos que são introduzidos ao modelo, através do critério ERR_i , não contribuem de maneira significativa a reduzir o erro de simulação medido pelo AOE , pode-se encarar isto com uma saturação da seleção de estrutura através da simulação. Isto pode ser entendido também observando os valores do critério ERR do algoritmo FROLS, que realiza a seleção de estrutura calculando a redução da variância, explicada, do sinal de saída do modelo após a introdução de cada termo. Na Tabela 3, a ordem de grandeza da redução de variância do critério ERR_i do quarto termo em diante já é de 10^{-6} , dificultando assim, a utilização apenas um critério de desempenho na identificação de sistemas de refrigeração, visto que os valores encontrados por Billings (2013) na aplicação do critério são na ordem de 10^{-2} .

Tabela 3 – ModeloARX identificado e critério ERR

Regressor	Parâmetros	ERR
$y(k-1)$	+0,4842	$9,9980 \times 10^{-1}$
$y(k-5)$	+0,1577	$4,5742 \times 10^{-5}$
$y(k-3)$	+0,1452	$1,1645 \times 10^{-5}$
$y(k-16)$	+0,1160	$5,9733 \times 10^{-6}$
$u(k-20)$	-0,0194	$5,0983 \times 10^{-6}$

A validação do modelo linear de predição da temperatura de evaporação identificado apresentou excelentes resultados como pode ser observado na Figura 4. O modelo consegue prever com boa performance o comportamento do processo. A temperatura de refrigeração é importante porque é a temperatura do fluido refrigerante que irá trocar calor com o meio que está sendo resfriado dentro do compartimento isolado.

O mesmo procedimento de detecção de estrutura foi realizado utilizando os resíduos de simulação do modelo ARX para estimar a ordem do filtro de ruído do modelo ARMAX. Identificou-se modelos ARMAX com o algoritmo FROLS selecionando modelos contendo de 6 até 25 termos mais importantes. Simulou-se os 19 modelos com um conjunto de dados de validação e o AOE foi determinado, como apresentado na Figura 5. Observa-se que o modelo com os 23 termos mais importantes possui o menor AOE , e seus termos e seus parâmetros são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Modelo ARMAX identificado

Regressor	Parâmetros	Regressor	Parâmetros	Regressor	Parâmetros
$y(k-1)$	+0,5740	$y(k-9)$	+0.1920	$y(k-19)$	-0.0684
$y(k-5)$	+0,3551	$y(k-4)$	-0.2250	$e(k-17)$	-0.0596
$y(k-3)$	+0,3210	$y(k-13)$	+0.1090	$u(k-4)$	-0.0197
$y(k-16)$	+0,0252	$y(k-8)$	-0.2041	$u(k-15)$	+0.0277
$u(k-20)$	-0,0319	$y(k-7)$	+0.1721	$e(k-2)$	+0.0403
$y(k-2)$	-0.2308	$y(k-6)$	-0.1530	$e(k-5)$	-0.0268
$e(k-4)$	-0.0160	$y(k-17)$	+0.1378	$e(k-10)$	-0.0191
$y(k-12)$	-0.1922	$y(k-15)$	+0.0652

Figura 4 – Validação do Modelo ARX: A) Simulação do modelo linear ARX; B) resíduos de predição

Figura 5 – Critério de desempenho AOE de Yiu e Wang, (2007) e algoritmo FROLS

Figura 6 – Validação do Modelo ARMAX: A) Simulação do modelo linear ARMAX; B) resíduos de predição

Em relação aos resíduos de simulação, pode-se observar na Figura 6-B que possuem magnitudes similares ao da Figura 4-B. Além disso o AOE , que está diretamente ligado ao erro de simulação, não sofre uma redução significativa em termos absolutos. O modelo ARX apresentado na Tabela 2 é o melhor modelo linear para o processo, apesar de $AOE_{ARX}(5) = 0,0419$ comparado com $AOE_{ARMAX}(23) = 0,025$. Ambos os modelos, apesar de possuírem resultados próximos, usam diferentes considerações em relação a natureza do erro aditivo do processo, o modelo ARX considera que o ruído aditivo é branco enquanto que o modelo ARMAX considera que o ruído aditivo é colorido e que pode ser explicado por um modelo linear. Porém, o objetivo do trabalho não é se aprofundar na natureza destas considerações, mas sim de obter o modelo linear mais esparsos possível, que de acordo com a Figura 3 o modelo ARX atende esses objetivos.

5. CONCLUSÃO

Com a combinação de critérios de seleção de estrutura ERR do algoritmo FROLS e do critério de desempenho AOE foi possível estimar modelos esparsos ARX e ARMAX em um ponto operacional de um processo de refrigeração. O modelo ARX possui um menor número de termos selecionado se, portanto, está mais próximo da definição de modelo esparsos, com um erro de médio de saída $0,0419$ °C. O modelo ARMAX com 23 termos obteve erro de médio de saída $0,0250$ °C. Ambos os modelos apresentaram boa predição com os dados simulados com o experimento para validação. Naturalmente o modelo com maior número de termos selecionados obteve menor erro, porém modelos sobre parametrizados estão suscetíveis a maior incerteza nos parâmetros, que pode resultar em regimes dinâmicos

espúrios e perda de generalidade do modelo quando simulado com outros dados experimentais.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L.A. **Introdução a identificação de sistemas: Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. Editora UFMG, 2000.

AGUIRRE, L.A.; BILLINGS, S.A. Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. **International Journal of Control** 62(3),1995, 569-587.

APREA, C.; MASTRULLO, R.; RENNO, C. Fuzzy control of the compressor speed in a refrigeration plant. **International Journal of Refrigeration** 27(6), 2004, 639-648.

BILLINGS, S. A. **Nonlinear System Identification: NARMAX Methods in time, frequency and spatio-temporal domains**. Wiley, 2013.

CAO, X.; LI, Z.-Y.; SHAO, L. -L.; ZANG, C, -L. Refrigerant flow through an electronic expansion valve: experiment and neural network modeling. **Applied Thermal Engineering** 92(5), 2016, 210-218.

CHEN, S., BILLINGS, S. A. e LUO, W. Orthogonal least squares methods and their application to nonlinear system identification. **International Journal of Control** 50:5, 1989, 1873-1896.

CHIOU, C. B.; CHIOU, C. H.; CHU, C. M.; LIN, S. L. The application of fuzzy control on energy saving for multi-unit room air-conditioners. **Applied Thermal Engineering** 29(2-3), 2009, 310-316.

ERTUNC, H. M., HOSOZ, M. Comparative analysis of an evaporative condenser using artificial neural network and adaptive neuro-fuzzy inference system. **International Journal of Refrigeration** 31(8), 2008, 1426-1436.

FRANCO, I. C.; DALL'AGNOL, M.; COSTA, T. V.; FILETTI, A. M. F.; SILVA, F. V. A neuro-fuzzy identification of non-linear transient systems: Application to a pilot refrigeration plant. **International Journal of Refrigeration** 34(8), 2011, 2063-2075.

HOSOZ, M.; ERTUNC, H. M.; BULGURCU, H. An adaptive neuro-fuzzy inference system model for predicting the performance of a refrigeration system with a cooling tower. **Expert Systems with Applications** 38(11), 2011, 14148-14155.

LARA, B. G. V.; MOLINA, L. M. C.; YANES, J. P. M.; BORROTO, M. A. R. Offset free model predictive control for an energy efficient tropical island hotel. **Energy and Buildings** 119, 2016, 283-292.

LIN, J. L., YEH, T. J. Identification and control of multi-evaporator air-conditioning systems. **International Journal of Refrigeration** 30(8), 2007, 1374-1385.

LJUNG, L. **System identification: Theory for the User**. Prentice Hall, 1987.

PIEDRAHITA-VELÁSQUEZ, C. A.; CIRO-VELÁSQUEZ, H. J.; GÓMEZ-BOTERO, M. A. Identification and digital control of a household refrigeration system with variable speed compressor. **International Journal of Refrigeration** 48, 2014, 178-187.

QI, Q.; DENG, S. Multivariable control-oriented modeling of a direct expansion (DX) air conditioning (A/C) system. **International Journal of Refrigeration** 31(5), 2008, 841-849.

RASMUSSEN, L. B.; BACHERA, P.; MADSENA, H.; NIELSEN, H. A.; HEERUP, C.; GREEN, T. Load for casting of supermarket refrigeration. **Applied Energy** 163, 2016, 32-40.

ROMERO, J. A.; NAVARRO-ESBRI, J.; BELMAN-FLORES, J. M. A simplified Black-box model oriented to chilled water temperature control in a variable speed vapor compression system. **Applied Thermal Engineering** 31(2-3), 2011, 329-335

SALEH, B.; AYMAN, A. A. Artificial neural network models for depicting mass flow rate of R22, R407C and R410A through electronic expansion valves. **International Journal of Refrigeration** 63, 2016, 113-124.

WEI, H.L., BILLINGS, S.A. LIU, J. Term and variable selection for non-linear system identification. **International Journal of Control** 77(1), 2004, 86-110.

YIU, J. C. M., WANG, S. Multiple ARMAX modeling scheme for forecasting air conditioning system performance. **Energy Conversion and Management** 48(8), 2007, 2276-2285.

ZHEN, T.; BO, G.; CHENG, Q.; LIN, Y.; FEN, L. Electronic expansion valve mass flow rate prediction based on dimensionless correlation and ANN model. **International Journal of Refrigeration** 57, 2015, 1-10.

IDENTIFICATION OF LINEAR MODELS ARX AND ARMAX IN REFRIGERATION PROCESS

ABSTRACT: *Refrigeration processes are present in many areas of everyday life, from air conditioning and residential refrigerators to applications involving the preservation of products with high added value. The need to develop other control strategies may arise and having a model representing the dynamics characteristics of the system can facilitate this task by reducing costs and time of simulation. In this work is sparse models ARX and ARMAX for prediction evaporating temperature of a refrigeration system using the FROLS algorithm for determining the ERR and AOE performance criteria. The developed models have good performance with AOE 0.0419 °C for model ARX model and 0.0250 °C for the model ARMAX.*

KEYWORDS: Identification System; ARX, ARMAX; Refrigeration Process.